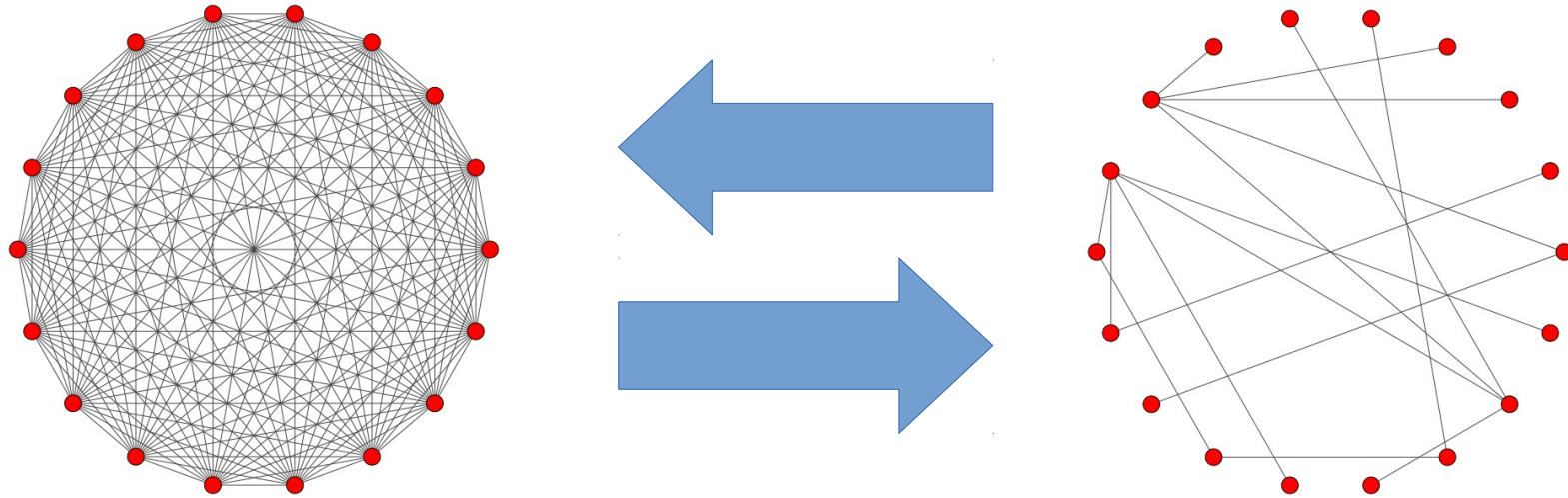


Between a complete graph and its minimal spanning tree



Tomasz Gubiec

Instytut Fizyki Doświadczalnej

Wydział Fizyki

Uniwersytet Warszawski

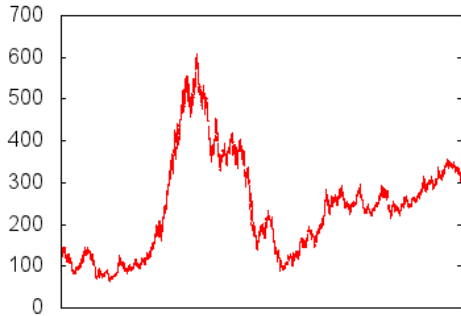


Plan prezentacji

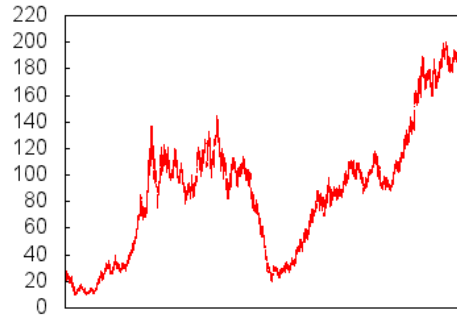
- Rynki finansowe jako grafy
- Podgrafy: „progowanie”, minimalne drzewo rozpinające (MST)
- Algorytm Kruskala
- Reverse-delete algorithm
- Dlaczego MST to za mało?
- Od grafu pełnego do MST
- Od MST do grafu pełnego
- Klika wyników dla WIG20

• Rynki finansowe jako grafy

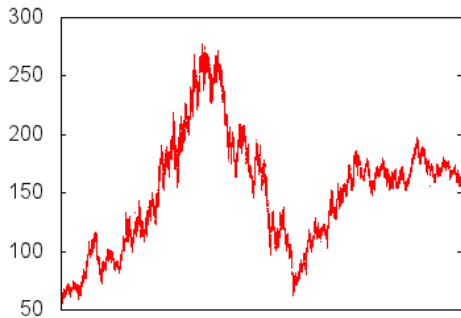
BRE



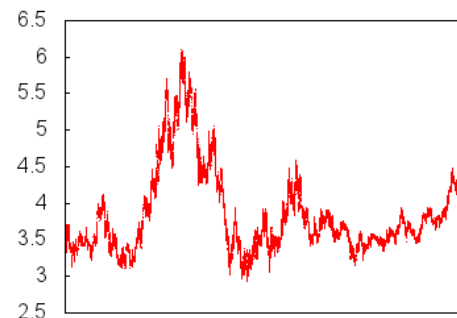
KGHM



PEKAO



PGNIG



Korelacje stóp zwrotu

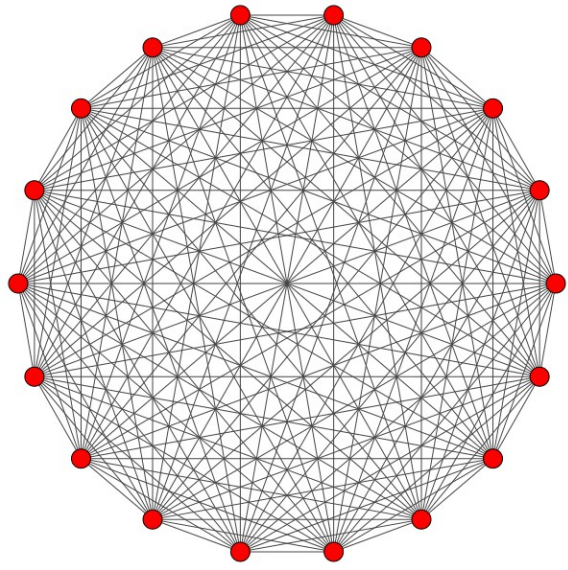
$$S(t) = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{\sqrt{(\langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2)(\langle S_j^2 \rangle - \langle S_j \rangle^2)}}$$

↓
Metryka (odległości)

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}$$

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$$

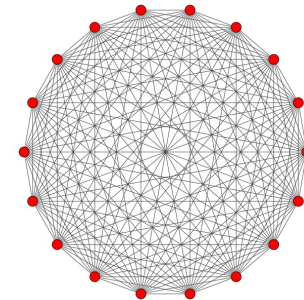
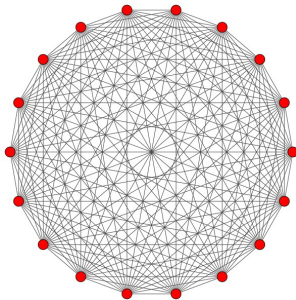


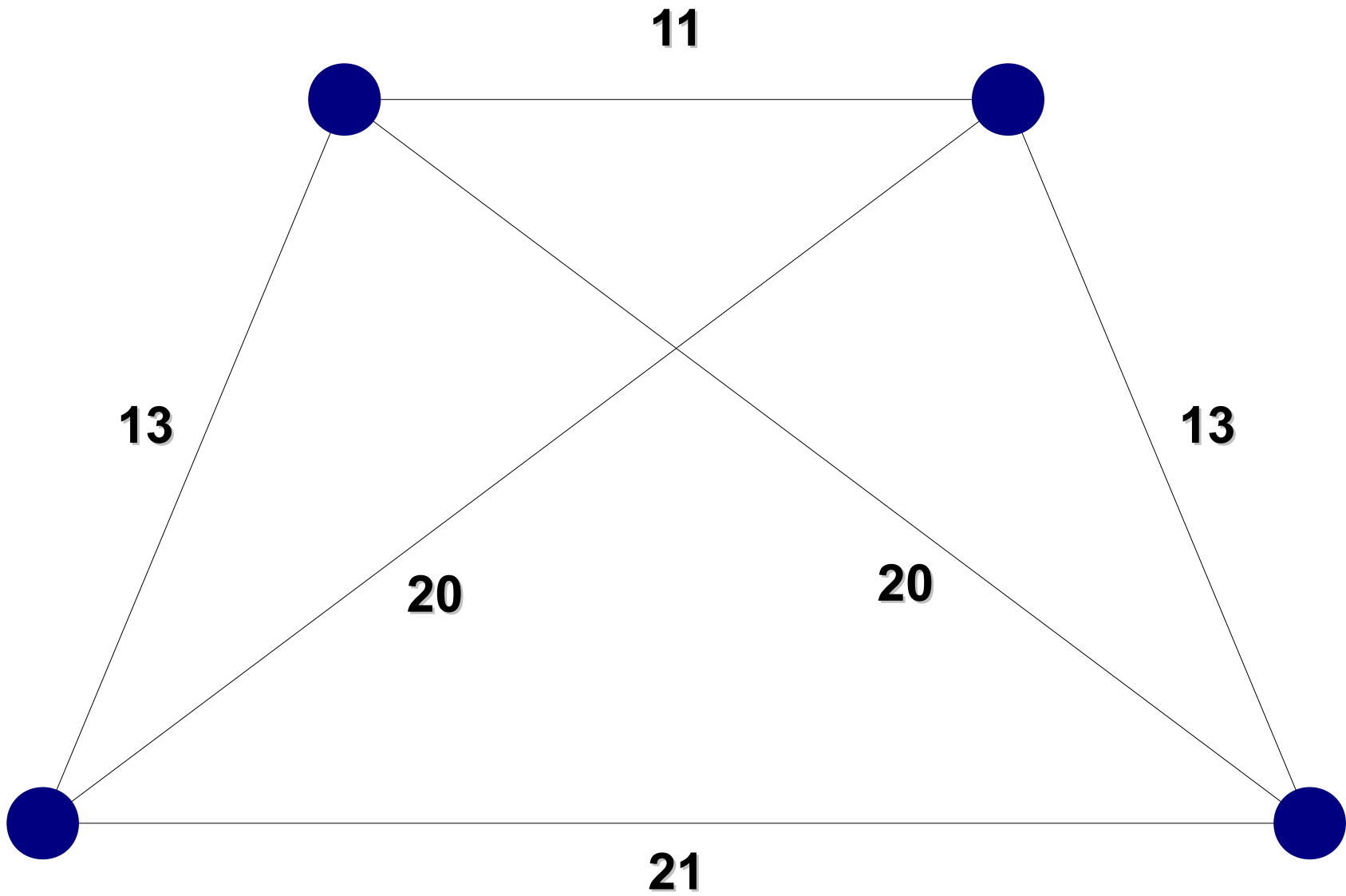
„Progowanie” (Thresholding)

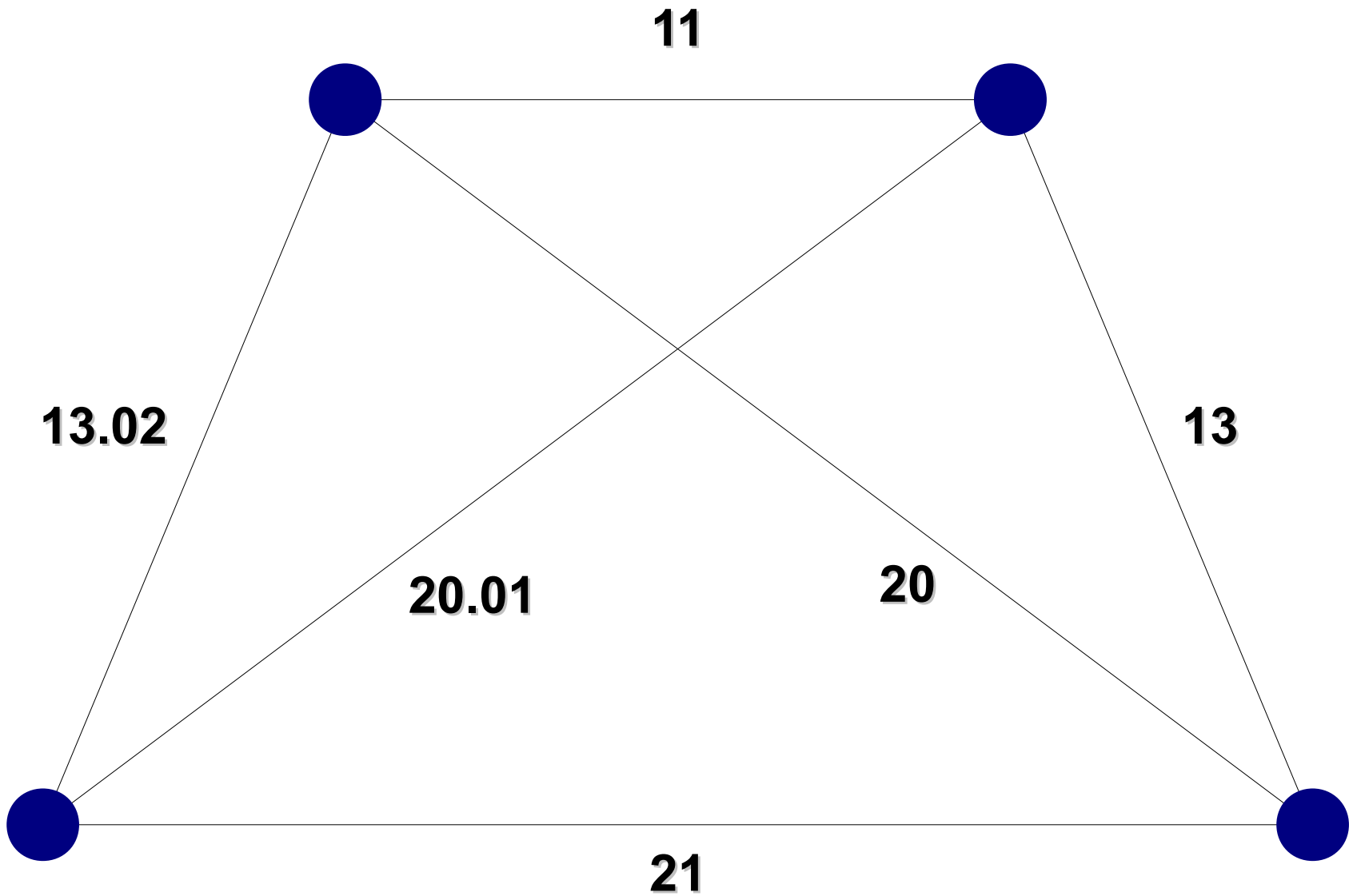
Usuwamy krawędzie o wadze większej (bądź mniejszej) niż ustalona wartość (próg)

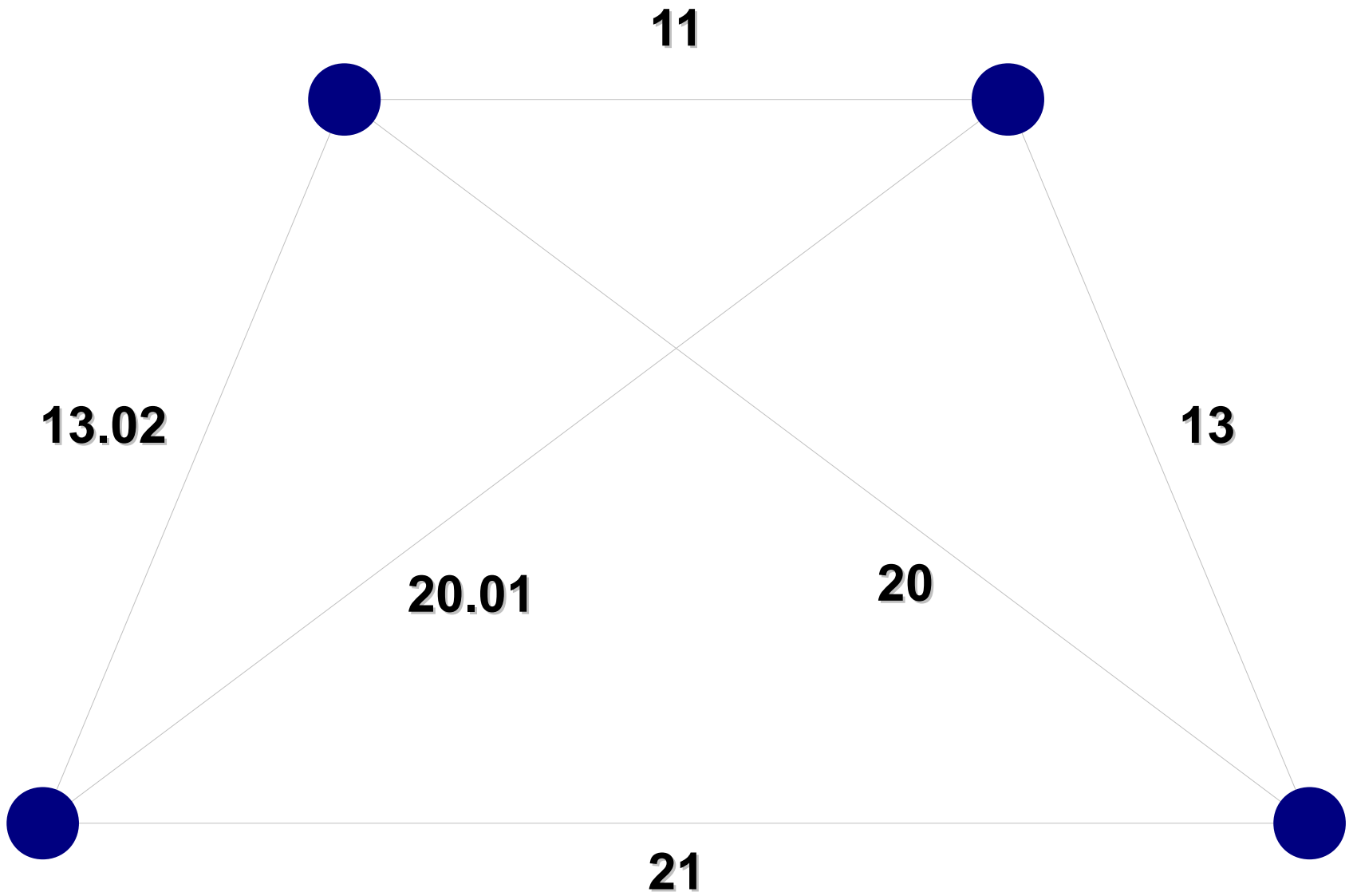


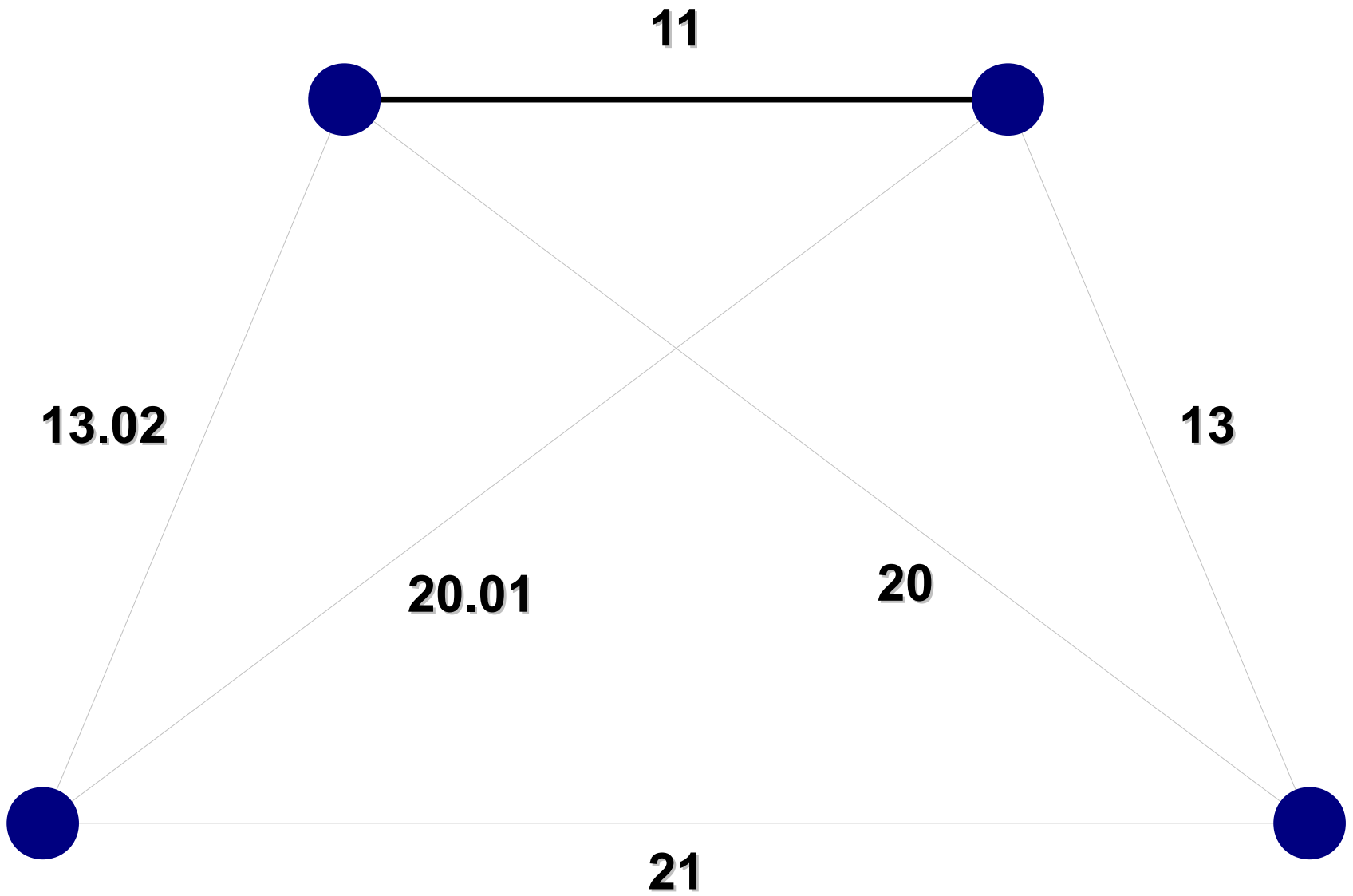
Wynikowy podgraf wcale nie musi być spójny

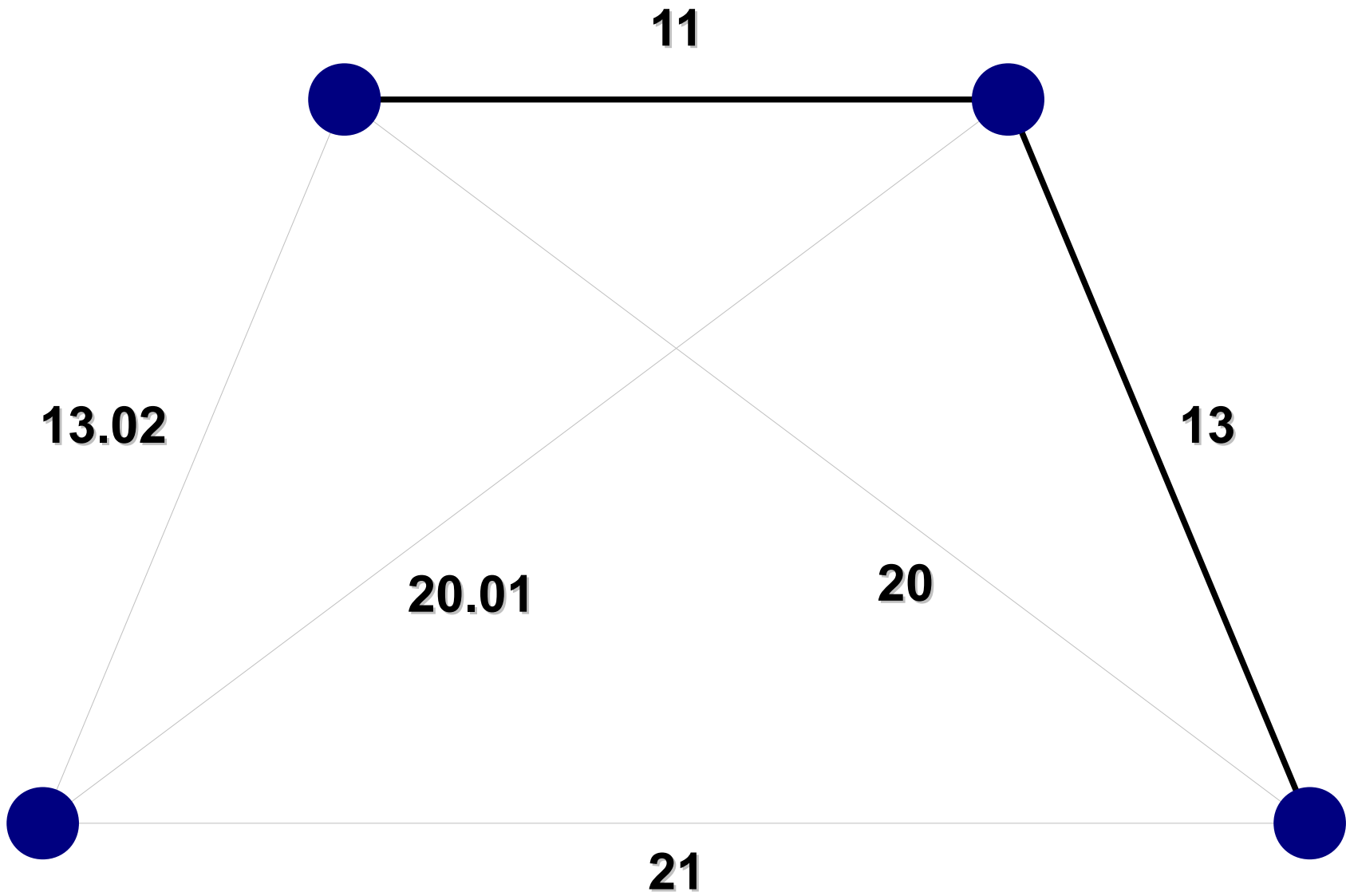


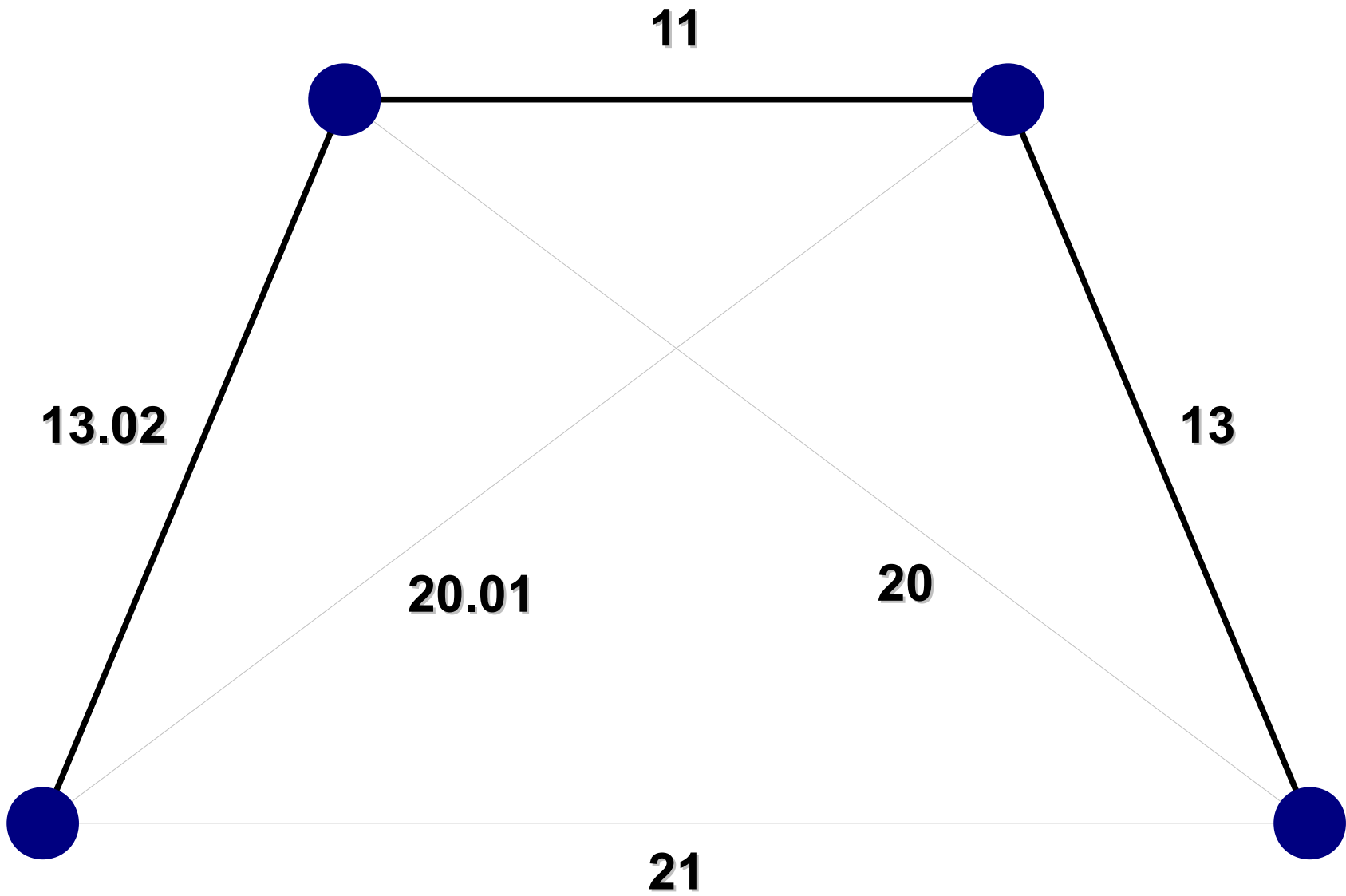


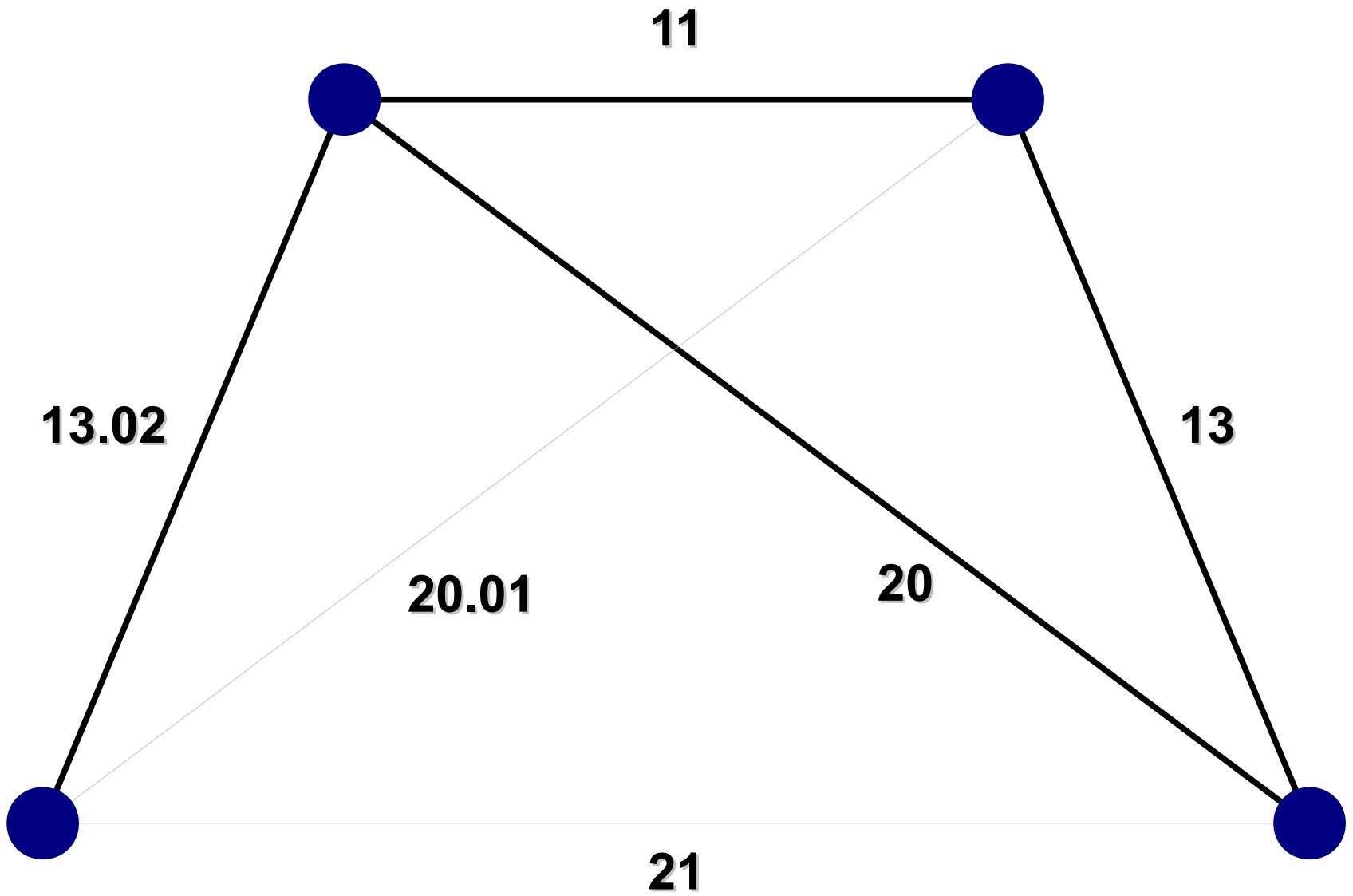


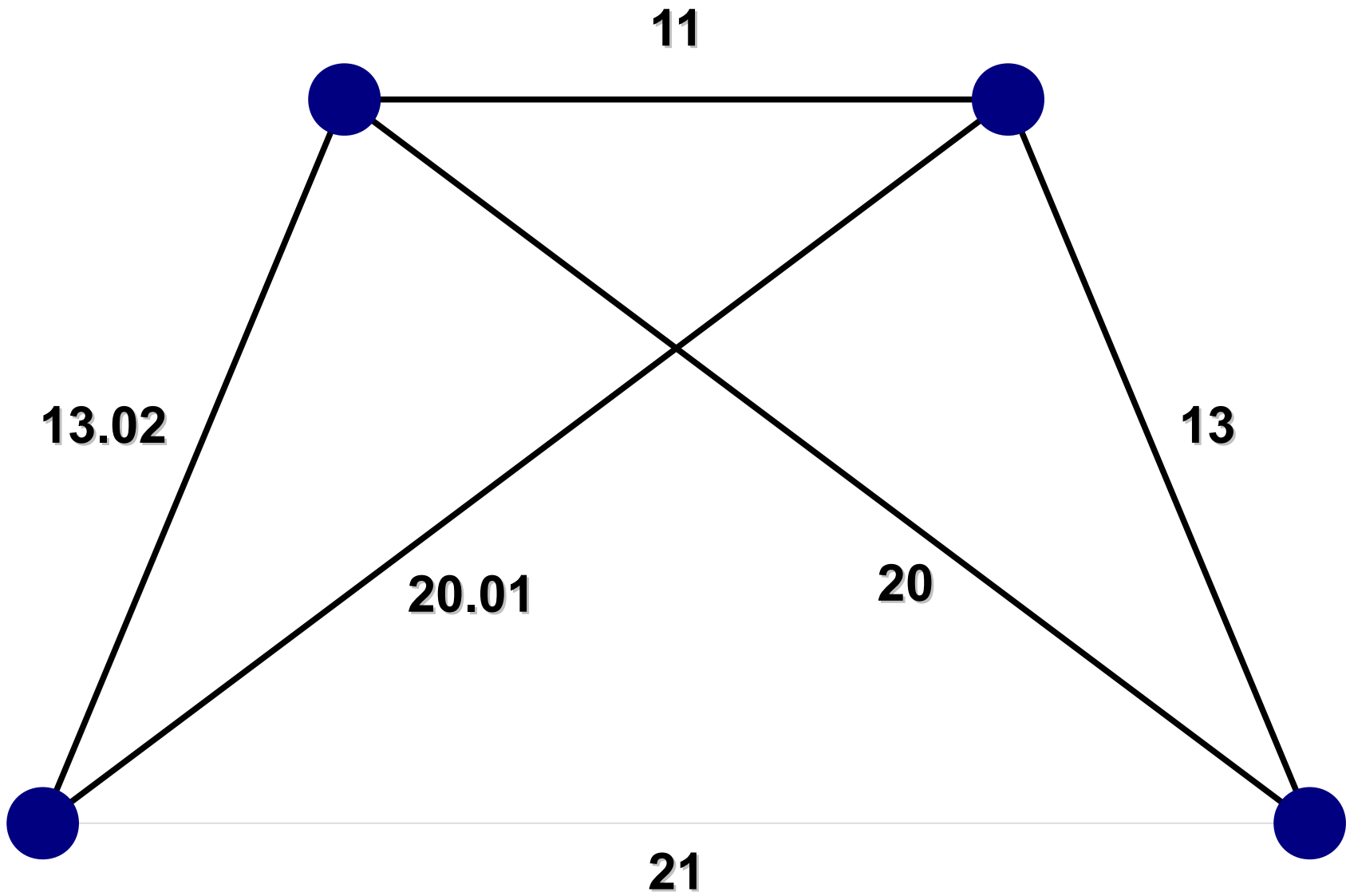


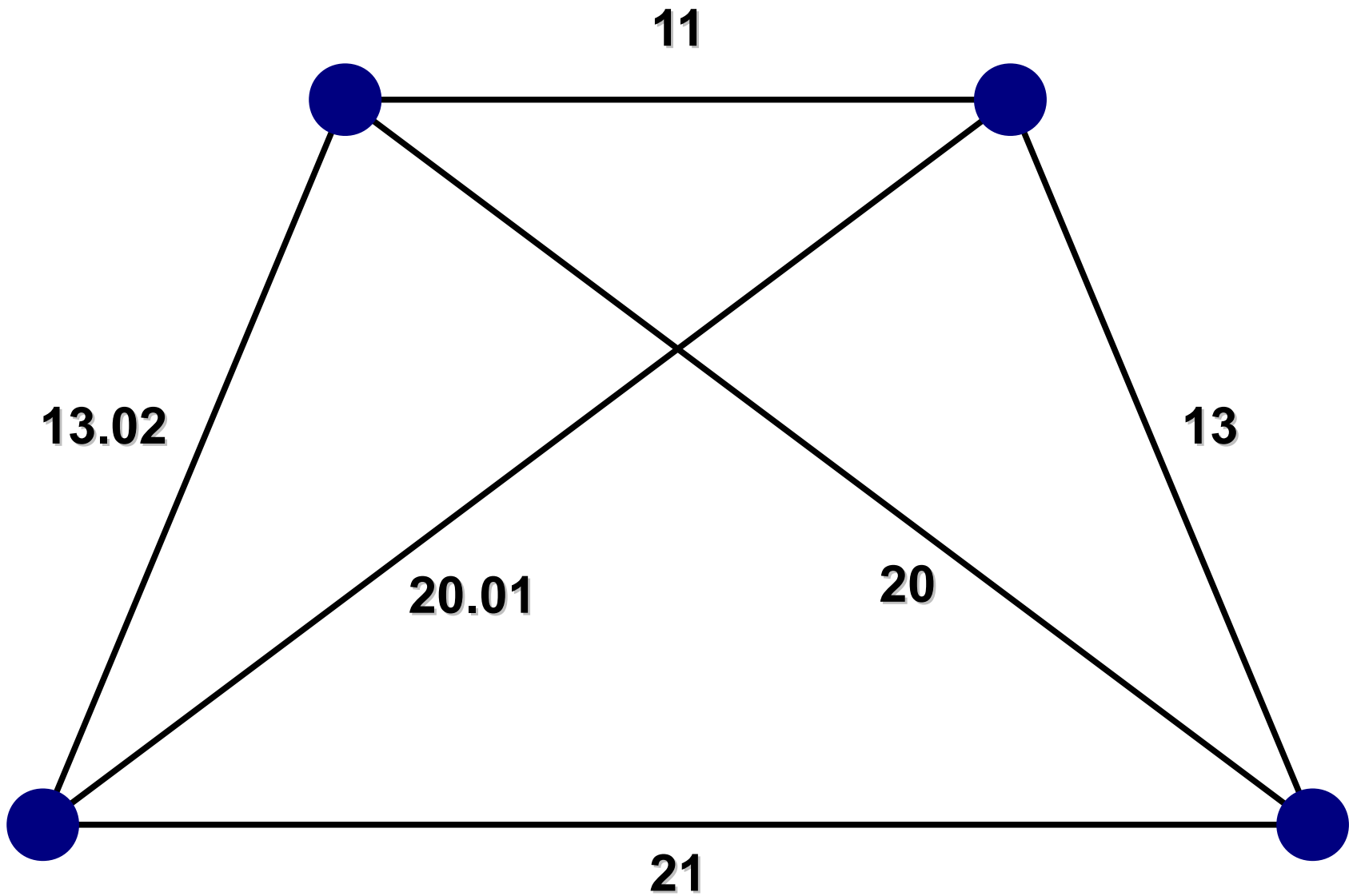






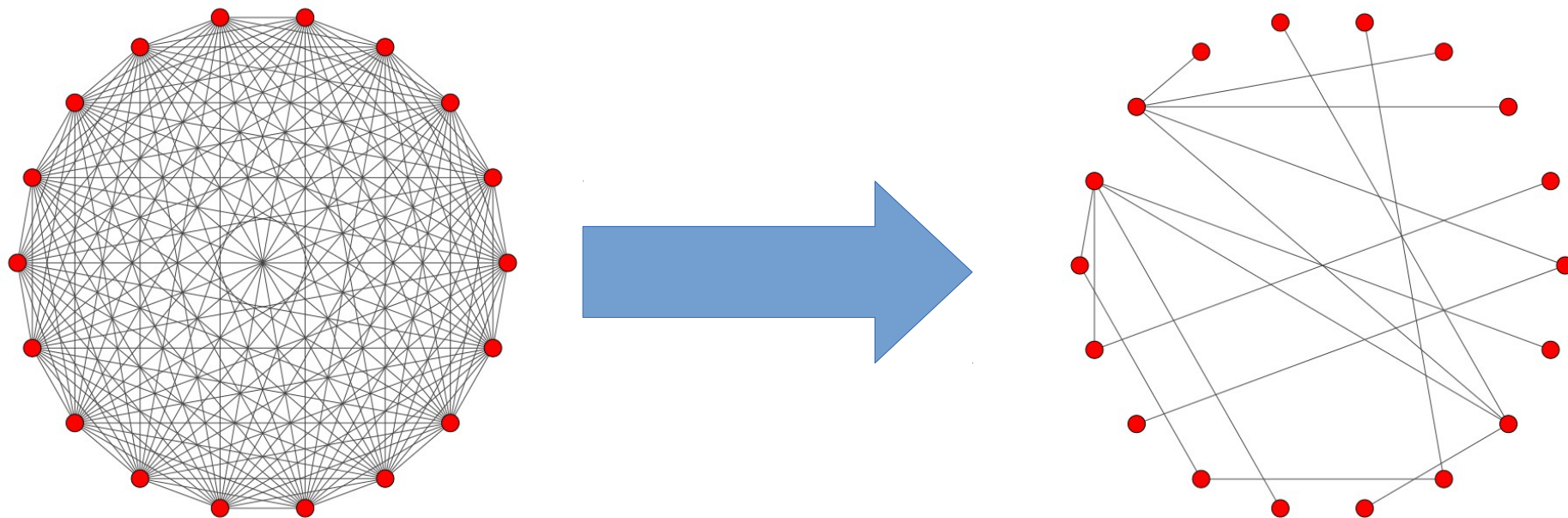






Minimalne drzewo rozpinające

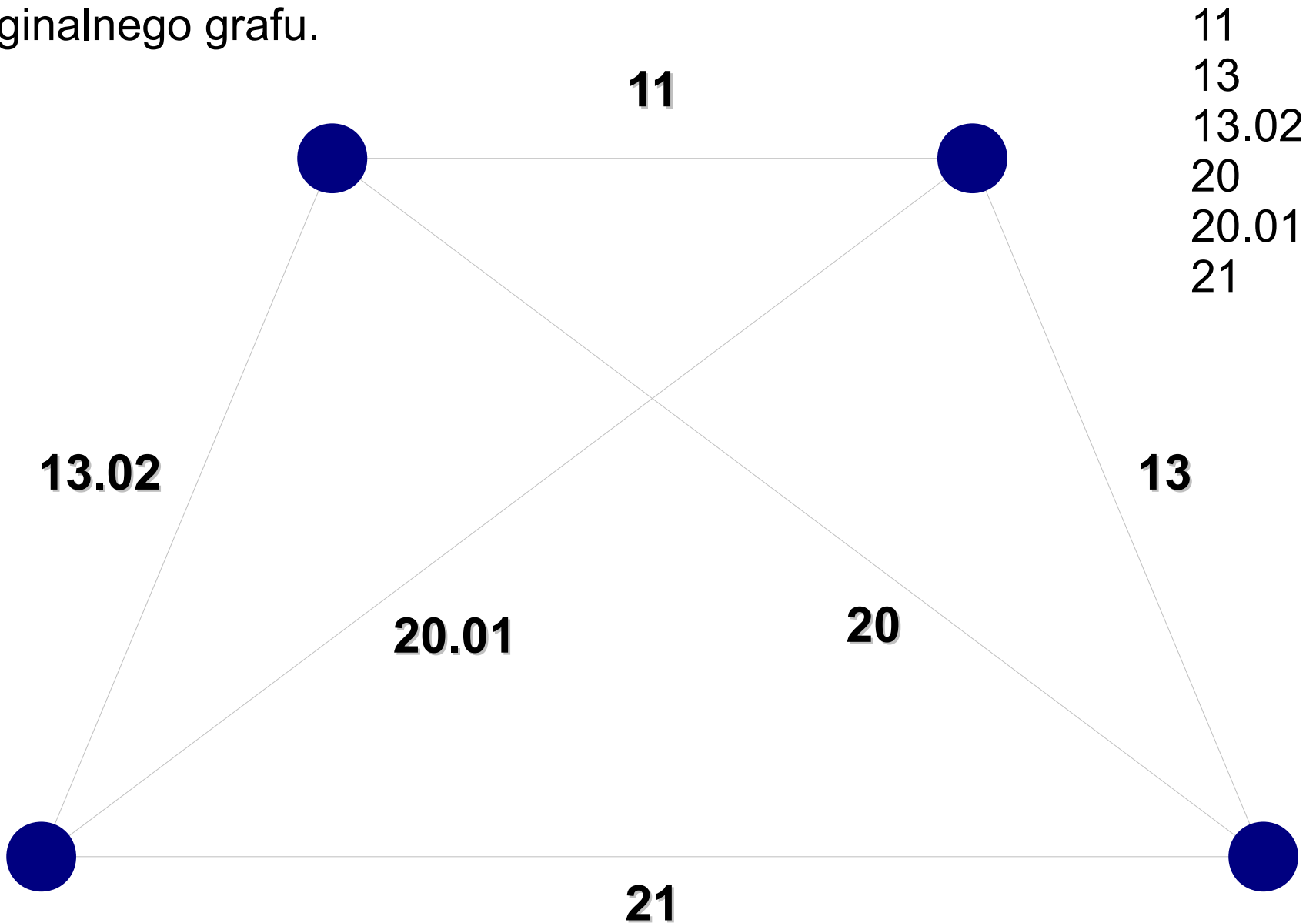
drzewo rozpinające danego grafu o najmniejszej z możliwych wag, tj. takie, że nie istnieje dla tego grafu inne drzewo rozpinające o mniejszej sumie wag krawędzi.



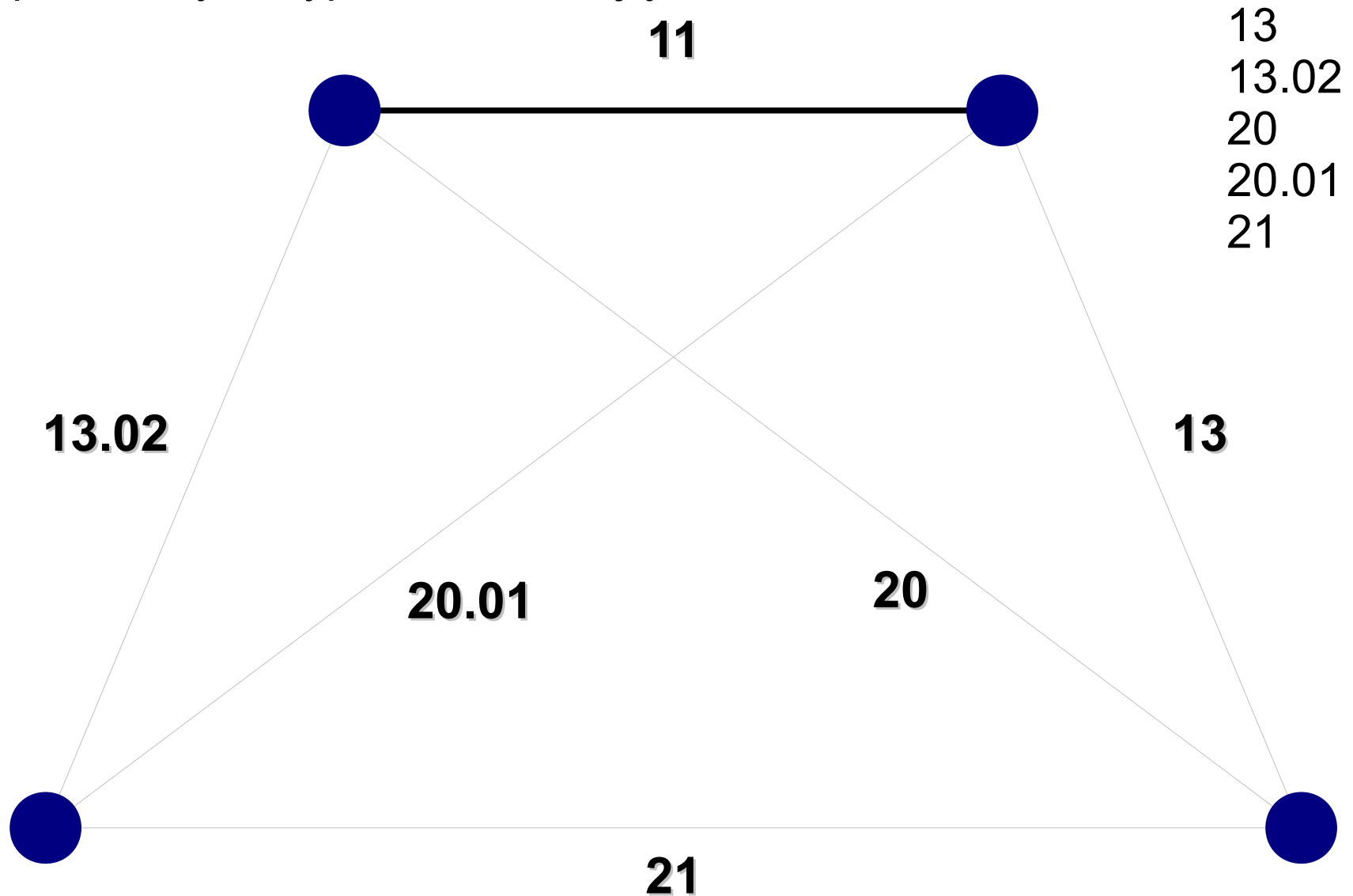
Algorytmy znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego

- Algorytm Prima
- Algorytm Kruskala
- Reverse-delete algorithm

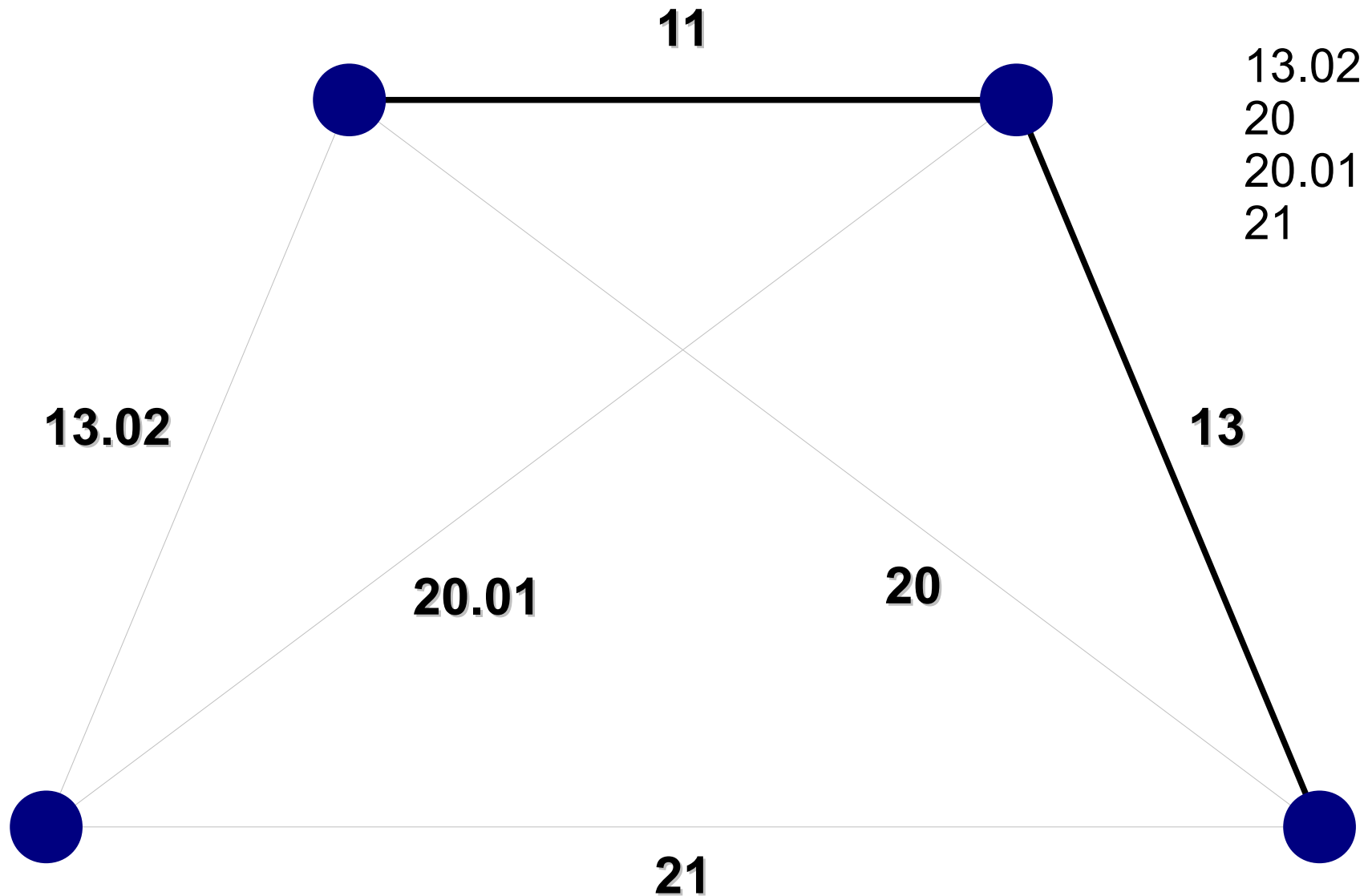
- Utwórz las L z wierzchołków oryginalnego grafu – każdy wierzchołek jest na początku osobnym drzewem.
- Utwórz zbiór S zawierający wszystkie krawędzie oryginalnego grafu.



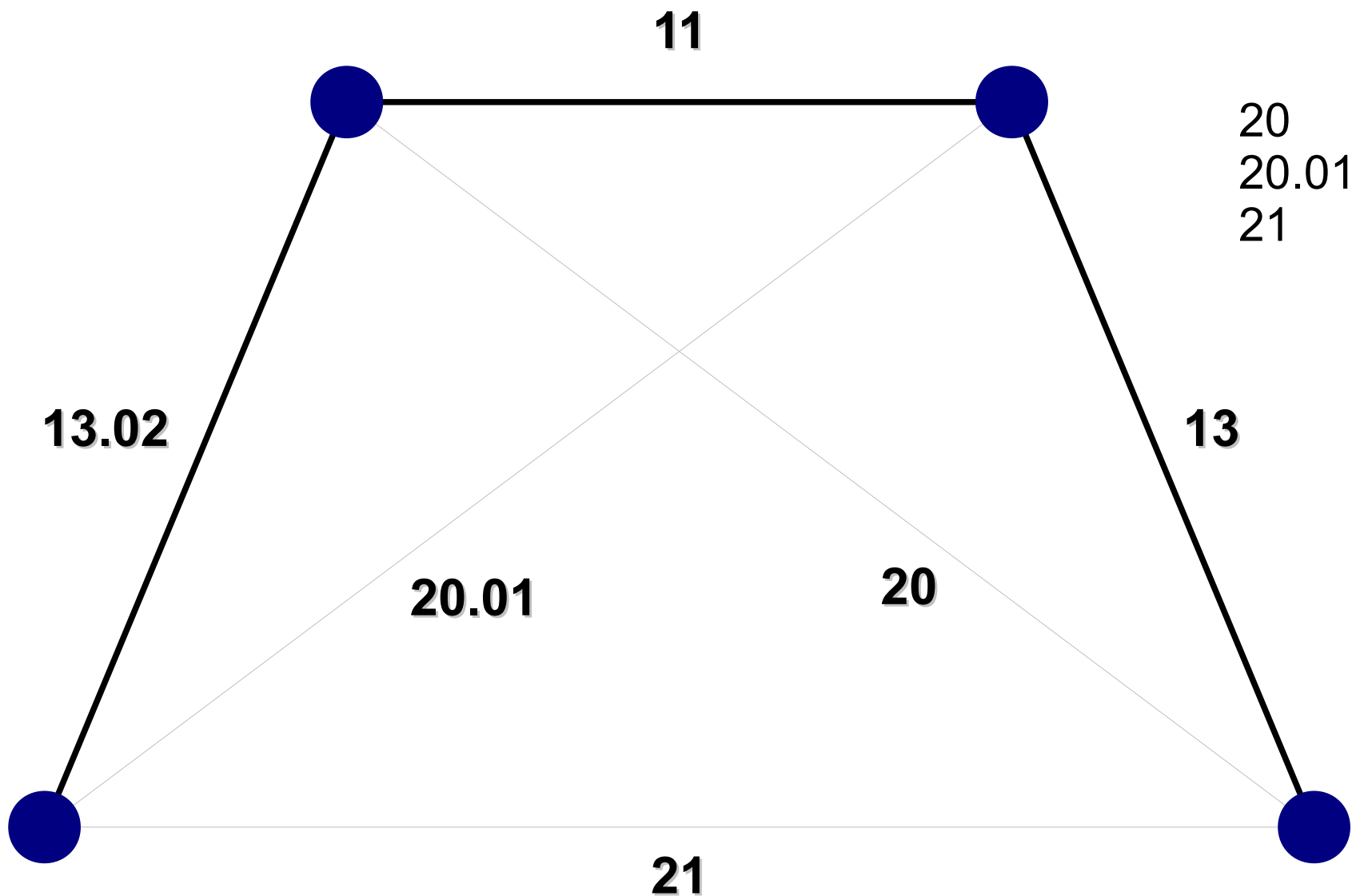
- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o minimalnej wadze.
- Jeśli krawędź ta łączyła dwa różne drzewa, to dodaj ją do lasu L, tak aby połączyła dwa odpowiadające drzewa w jedno.
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.



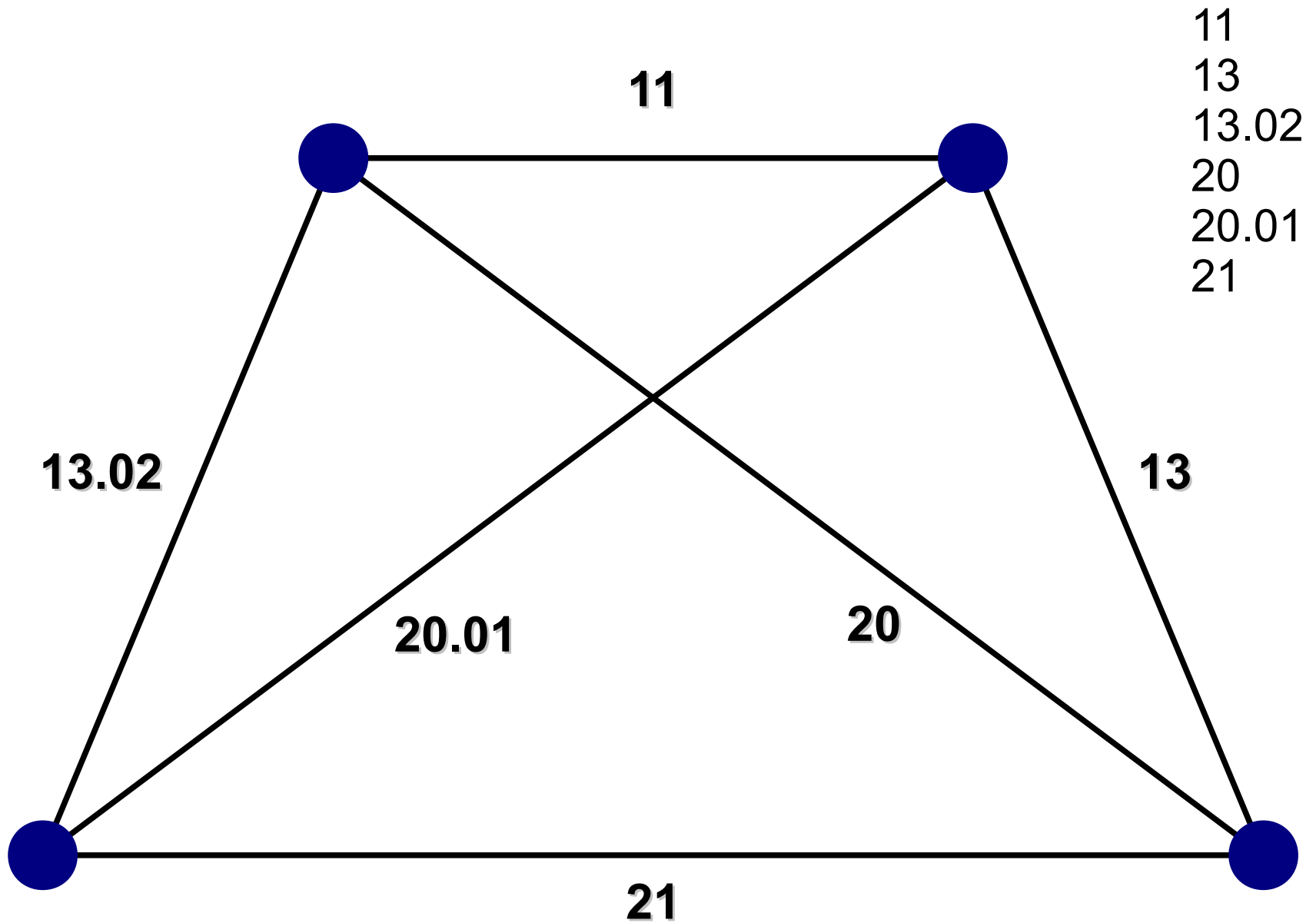
- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o minimalnej wadze.
- Jeśli krawędź ta łączyła dwa różne drzewa, to dodaj ją do lasu L, tak aby połączyła dwa odpowiadające drzewa w jedno.
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.



- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o minimalnej wadze.
- Jeśli krawędź ta łączyła dwa różne drzewa, to dodaj ją do lasu L, tak aby połączyła dwa odpowiadające drzewa w jedno.
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.

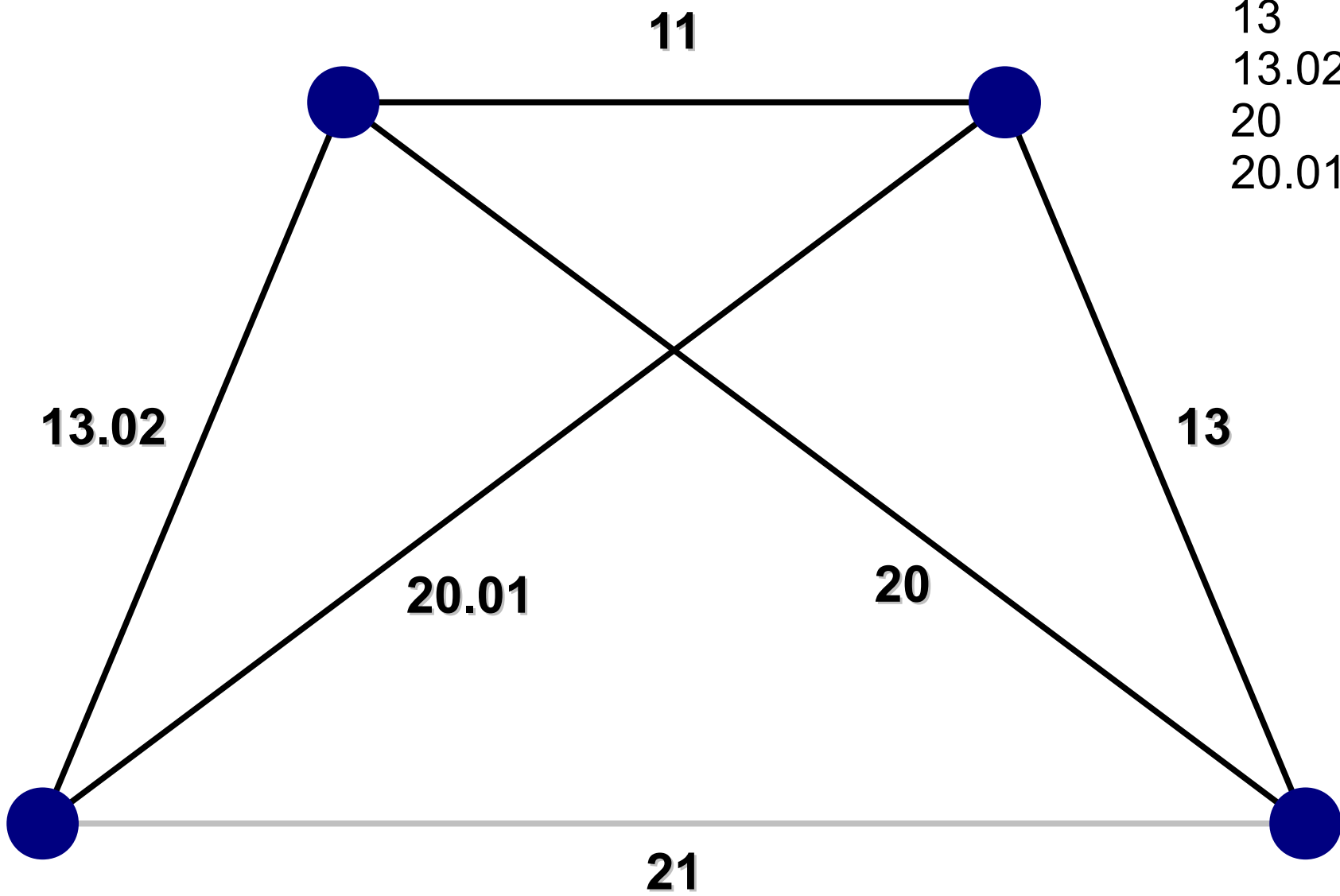


- Utwórz zbiór S zawierający wszystkie krawędzie oryginalnego grafu.



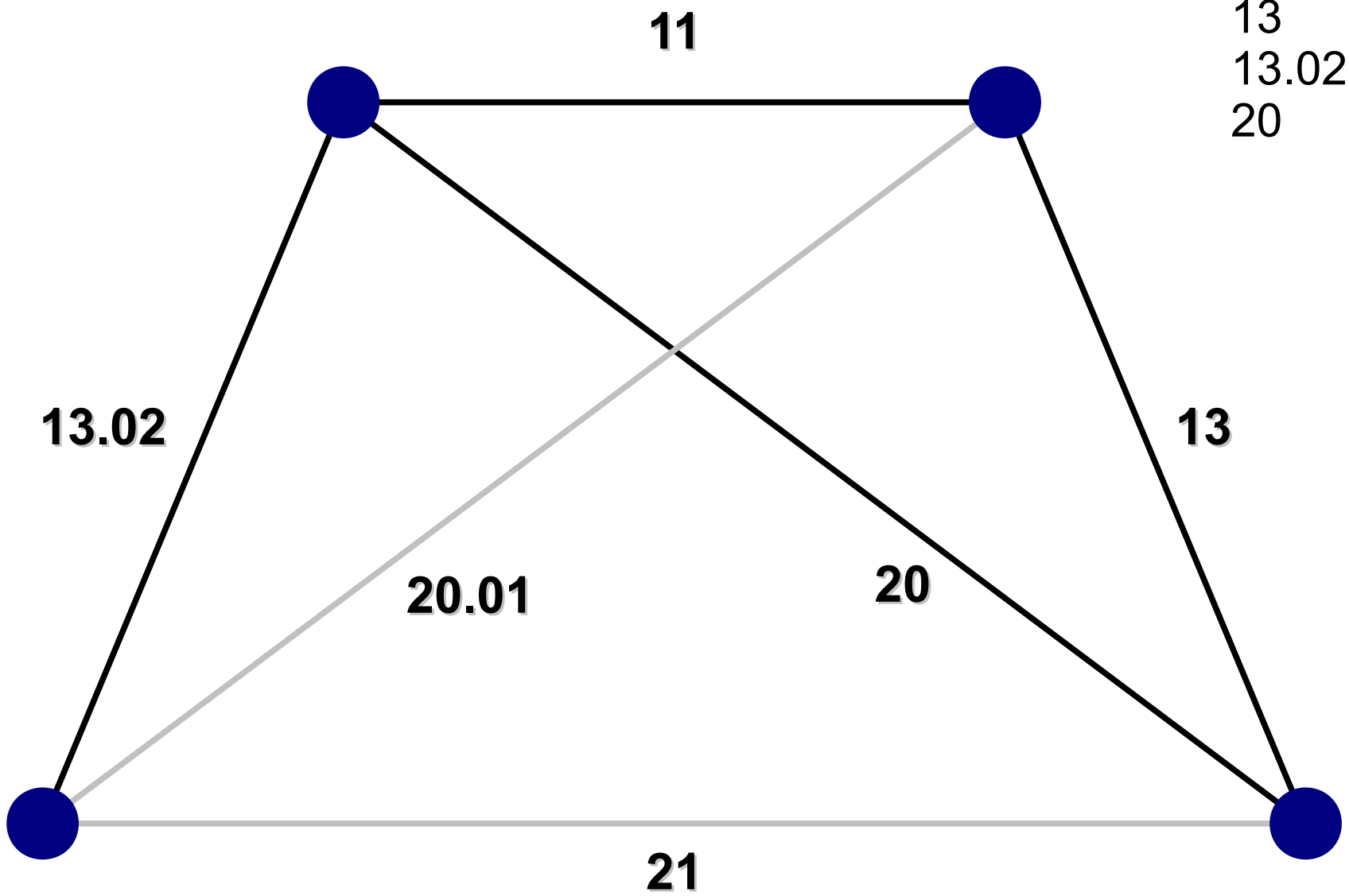
- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o **maksymalnej** wadze.
- Jeśli usunięcie tej krawędzi nie niszczy spójności grafu (nie jest ona mostem) to usuń ją
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.

11
13
13.02
20
20.01



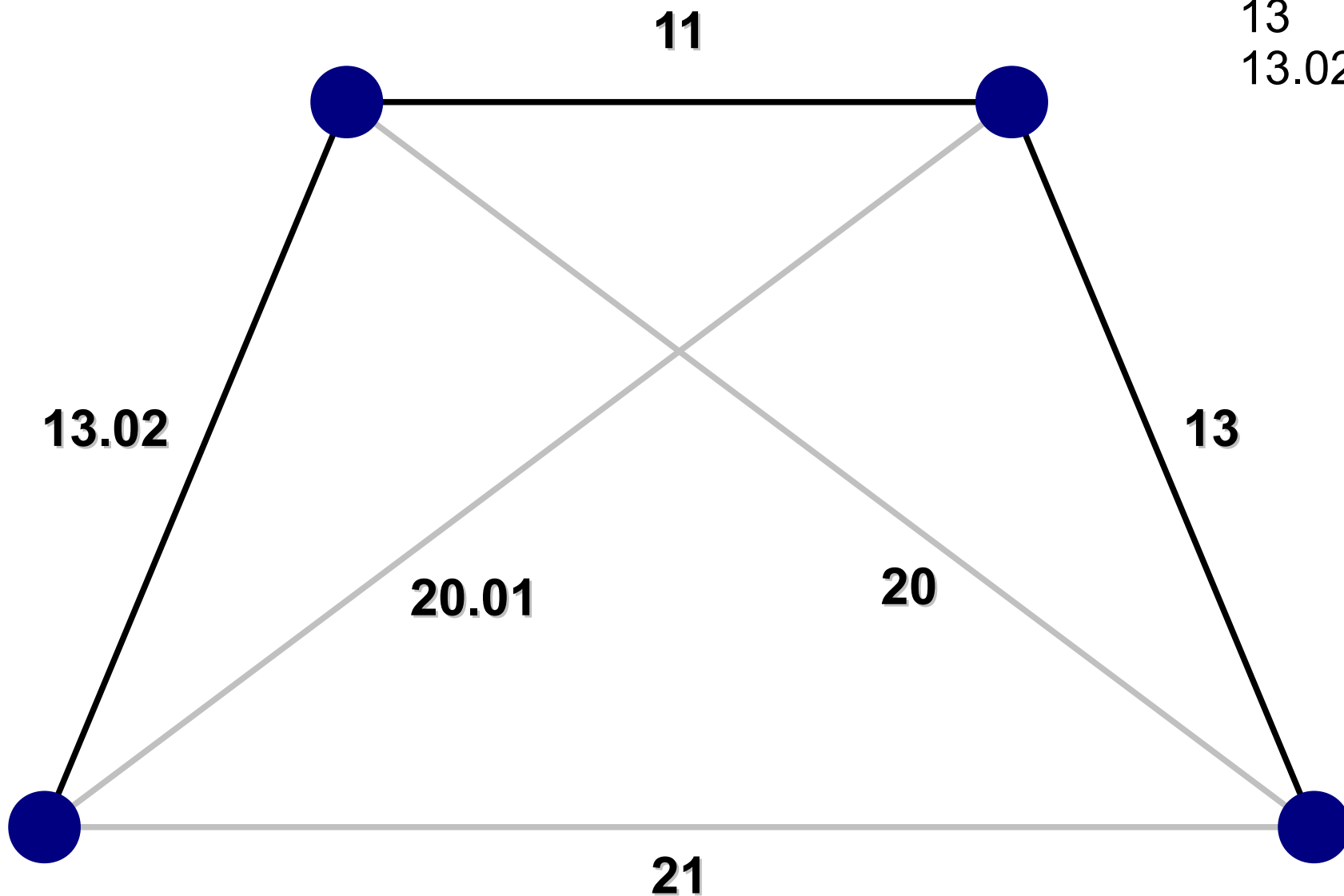
- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o **maksymalnej** wadze.
- Jeśli usunięcie tej krawędzi nie niszczy spójności grafu (nie jest ona mostem) to usuń ją
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.

11
13
13.02
20

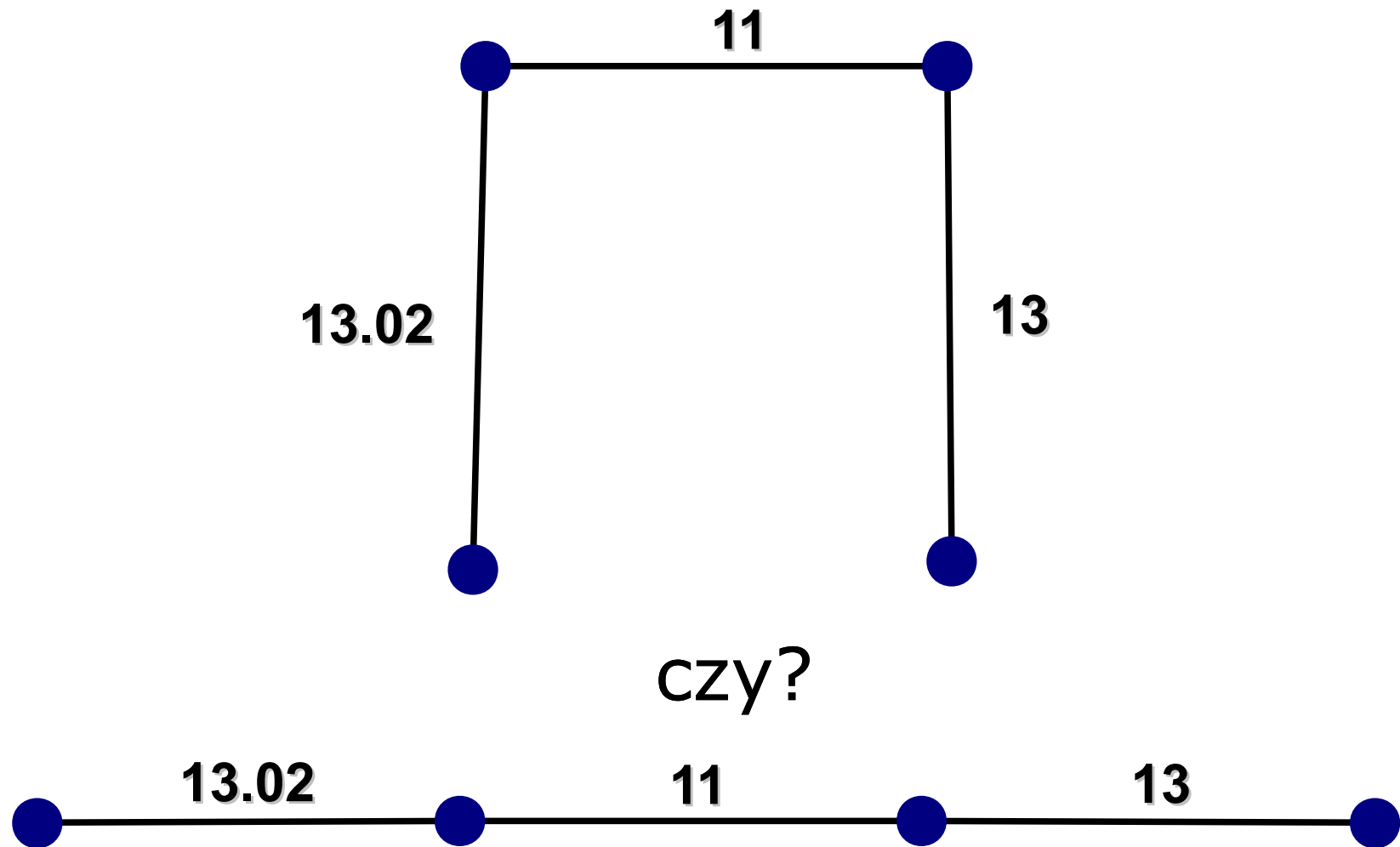


- Wybierz i usuń z S jedną z krawędzi o **maksymalnej** wadze.
- Jeśli usunięcie tej krawędzi nie niszczy spójności grafu (nie jest ona mostem) to usuń ją
- W przeciwnym wypadku odrzuć ją.

11
13
13.02



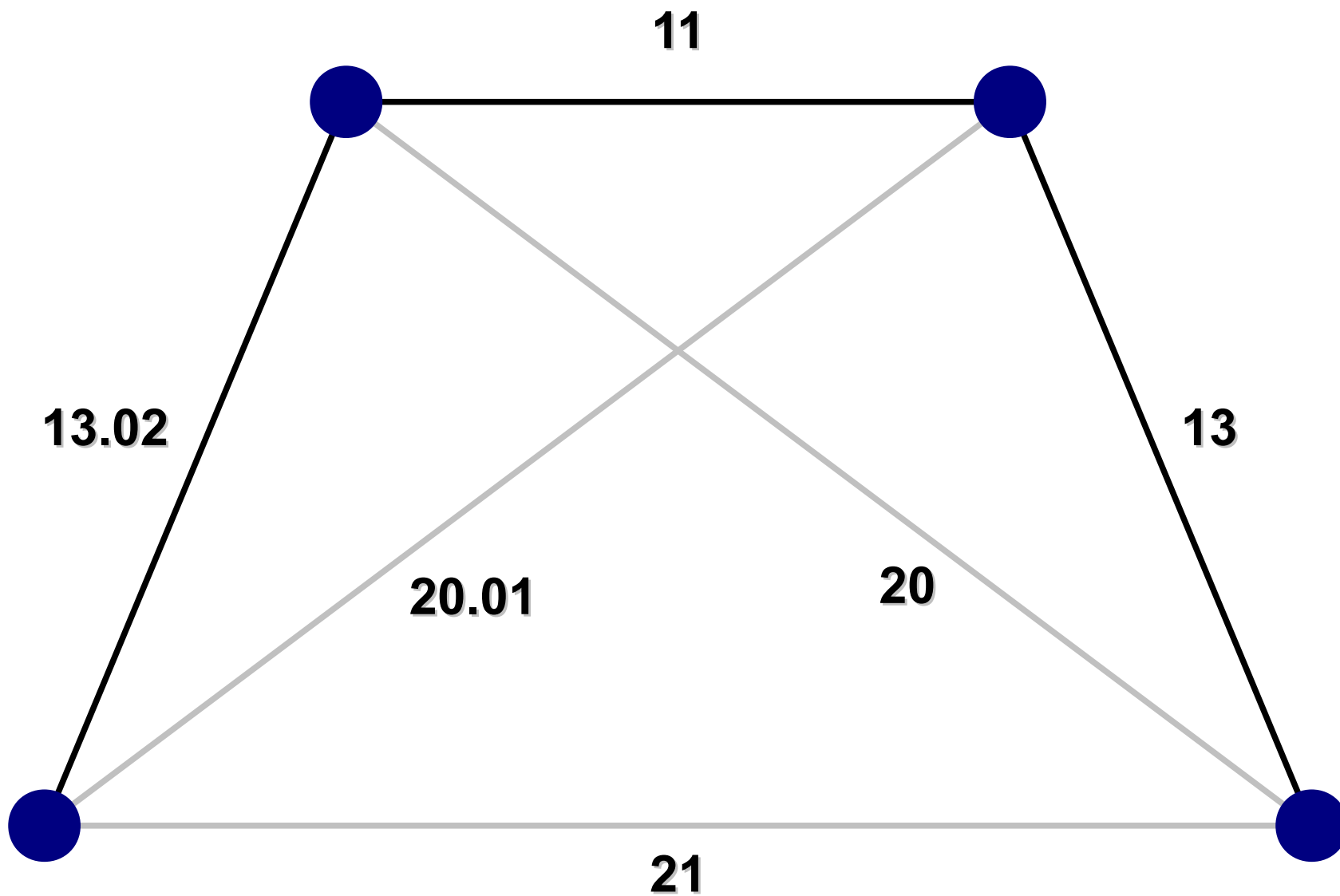
Dlaczego MST to za mało?



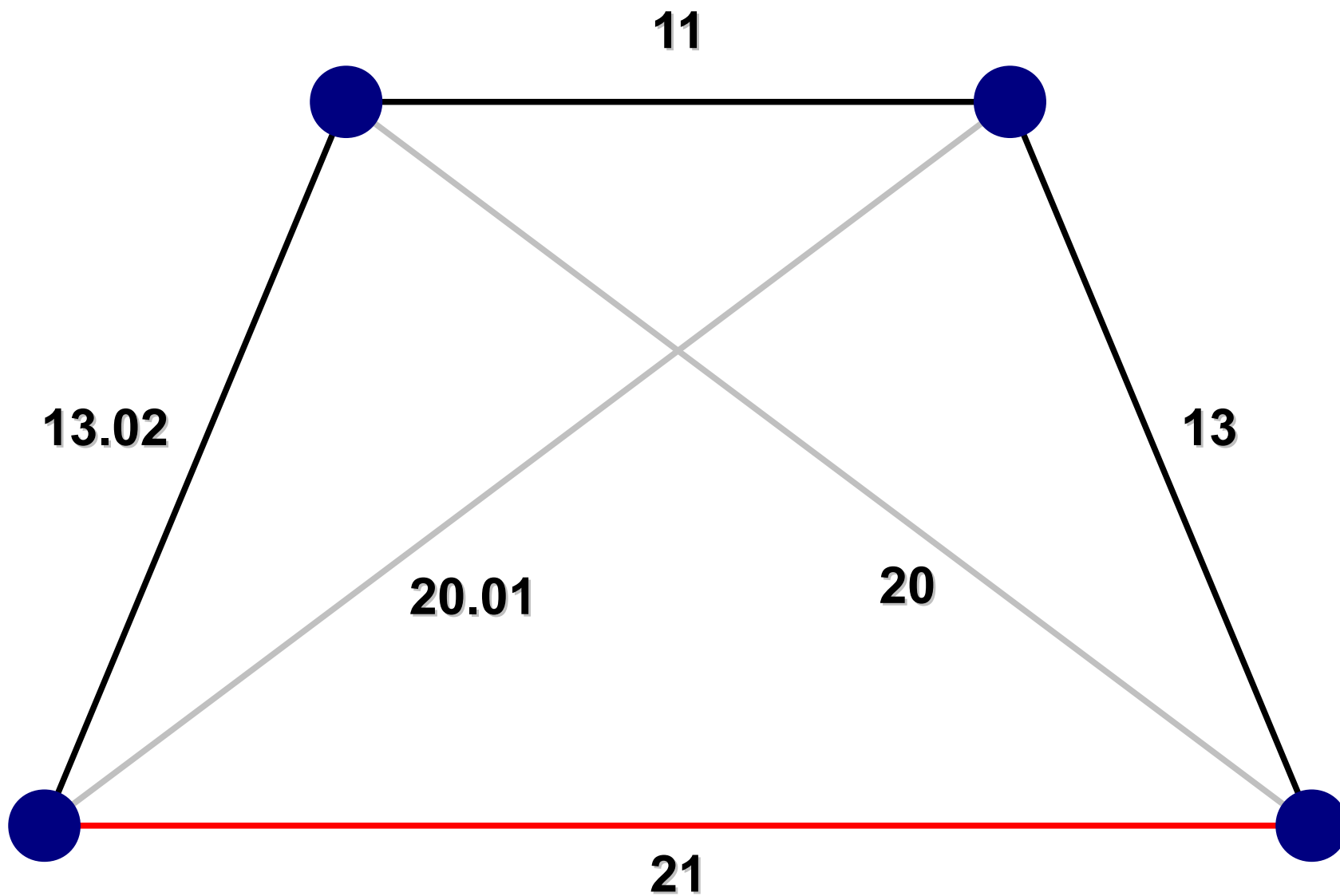
Co chcemy przybliżyć?

ODLEGŁOŚCI!

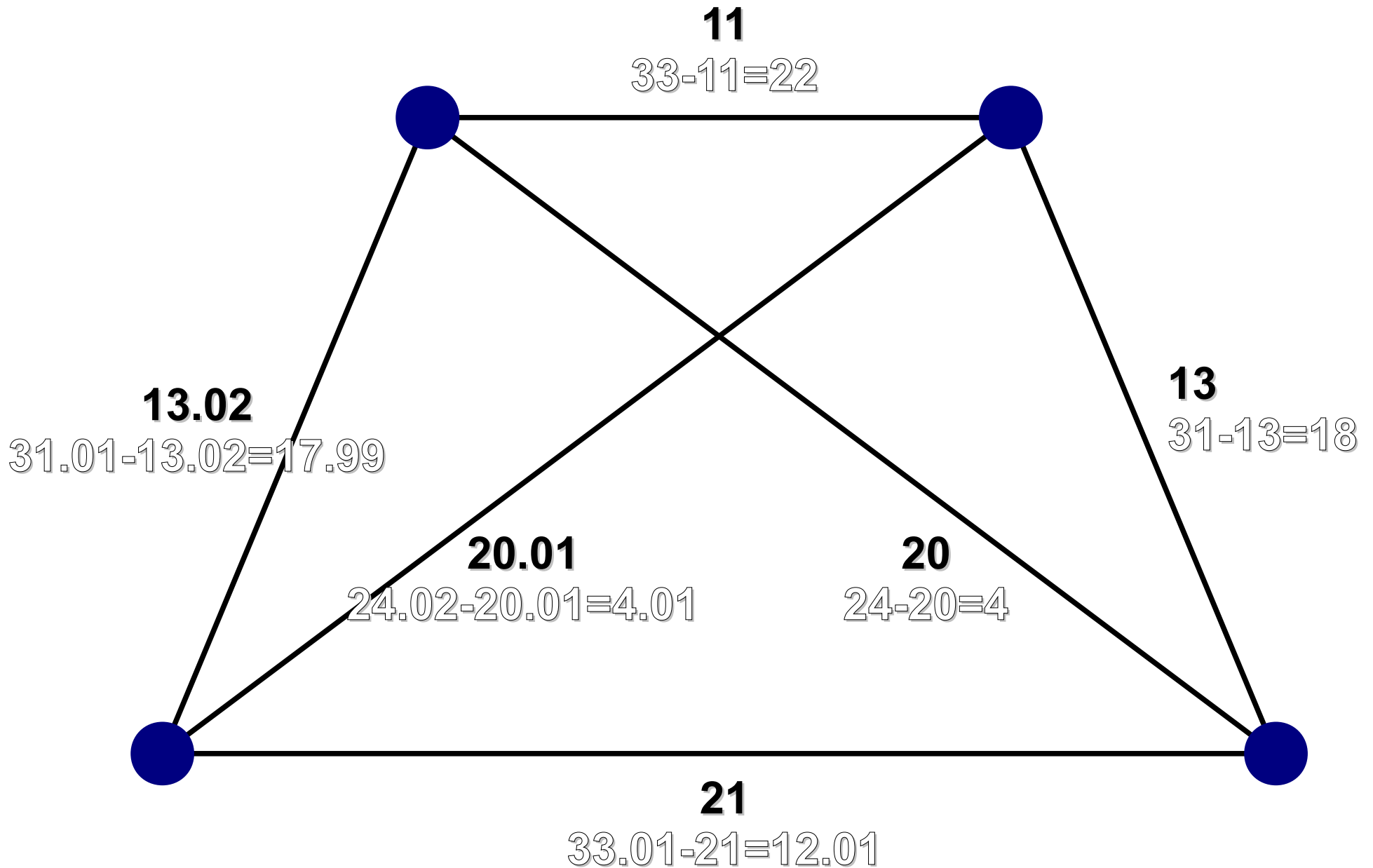
Która z usuniętych krawędzi wnosi najwięcej informacji do układu?



Która z usuniętych krawędzi wnosi najwięcej informacji do układu?

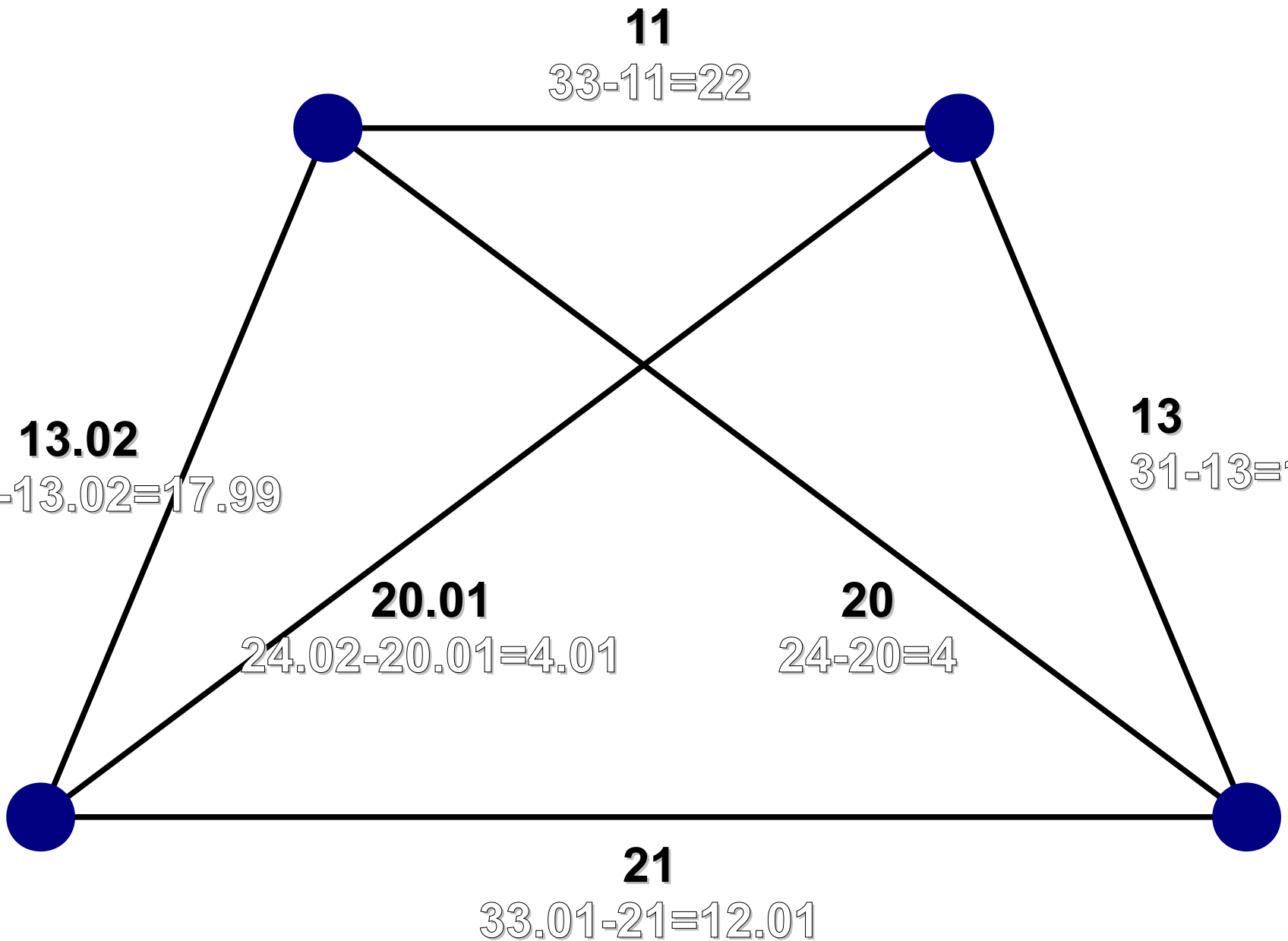


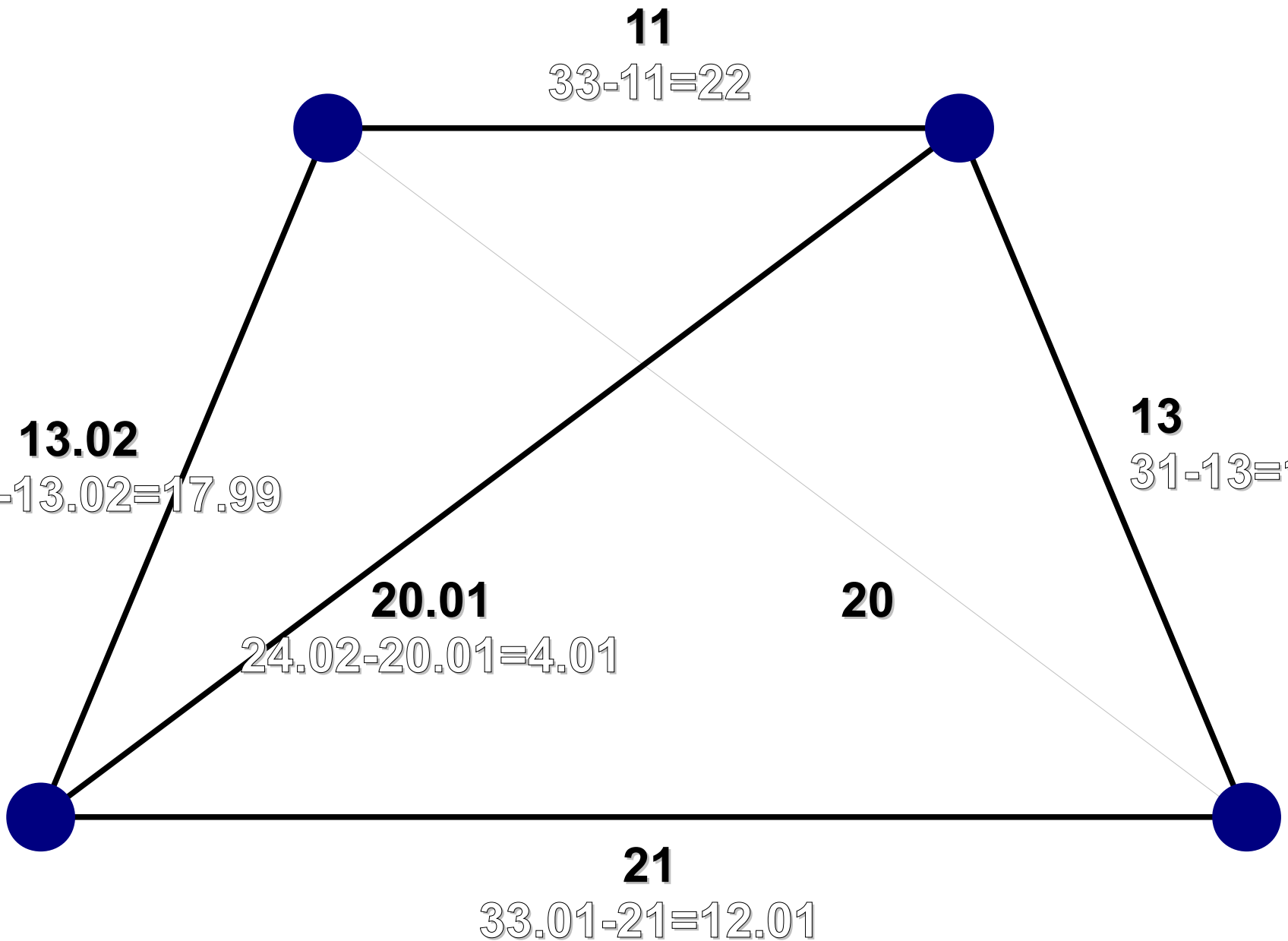
Nadwyżka drogi = minimalna długość ścieżki pośredniej – długość krawędzi



Od grafu pełnego do MST

- Rozpoczynamy od grafu pełnego
- Utwórz zbiór S zawierający nadwyżki drogi dla wszystkich krawędzi
- Dopóki S nie jest pusty:
 - Wybierz i usuń z S oraz grafu krawędź o **minimalnej** nadwyżce drogi.
 - Aktualizuj nadwyżki drogi w S , usuwając nadwyżki o wartości nieskończonej





11

$33-11=22$

13

$31-13=18$

13.02

$31.01-13.02=17.99$

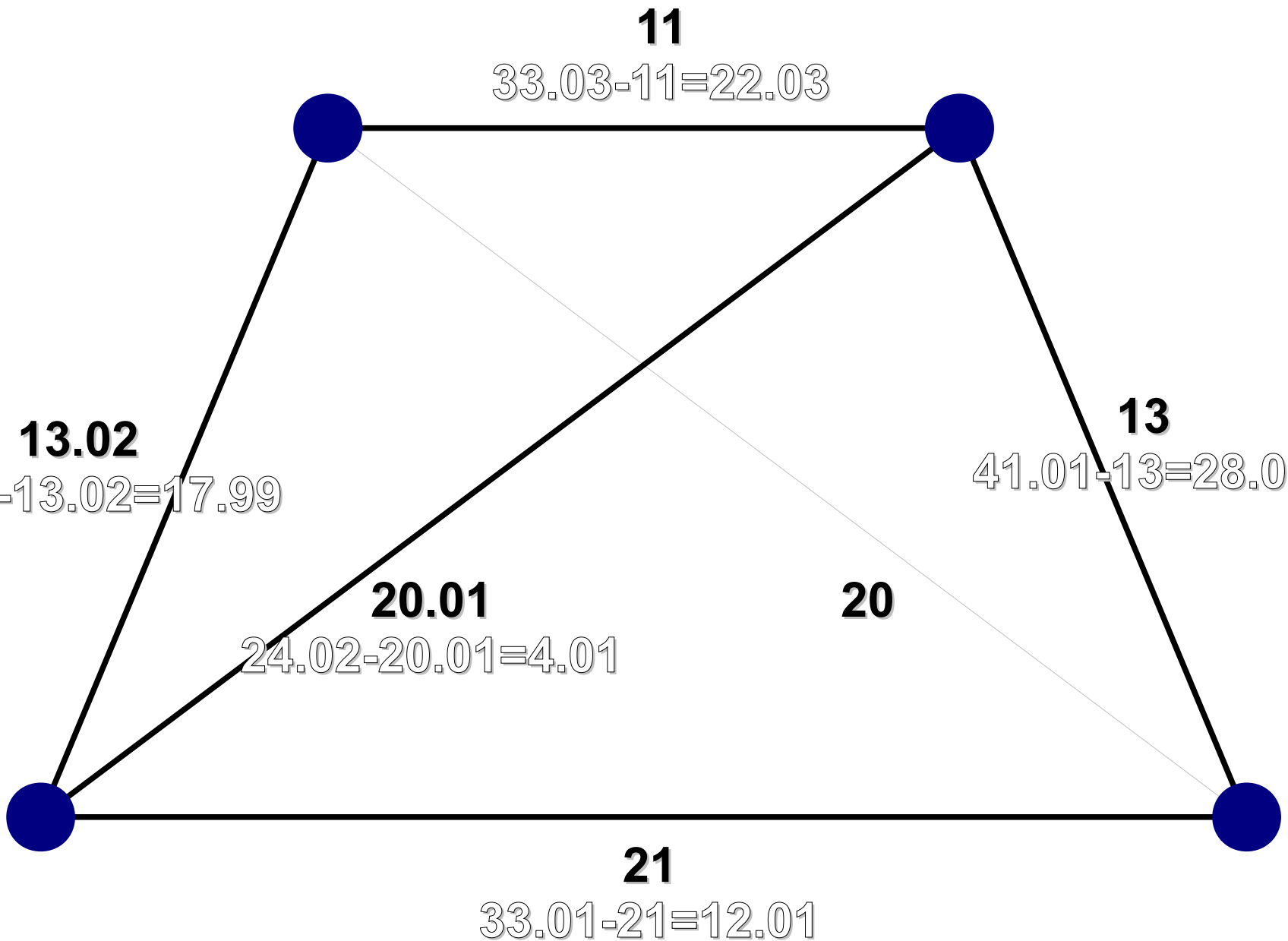
20.01

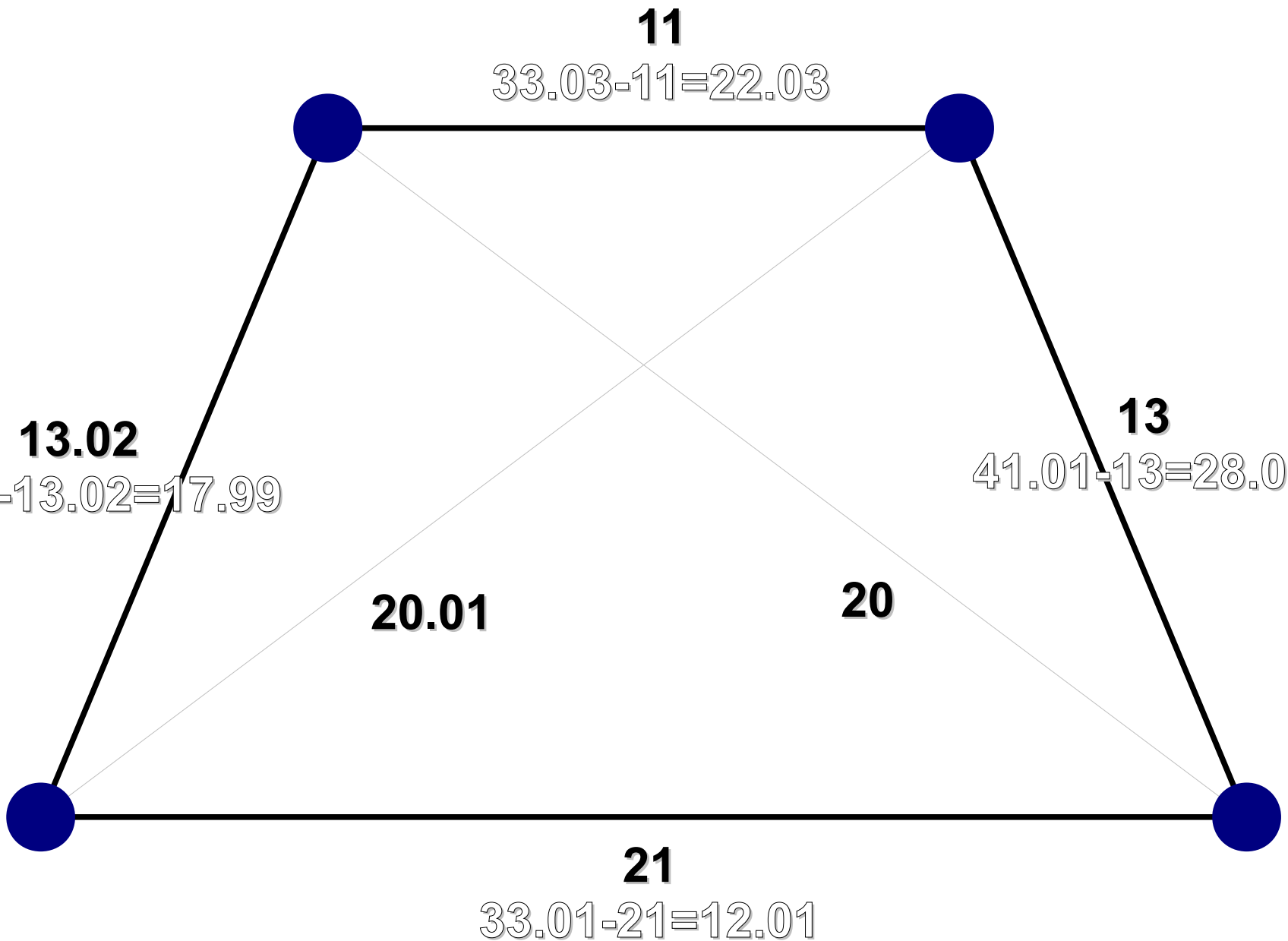
$24.02-20.01=4.01$

20

21

$33.01-21=12.01$





11

$33.03 - 11 = 22.03$

13

$41.01 - 13 = 28.01$

13.02

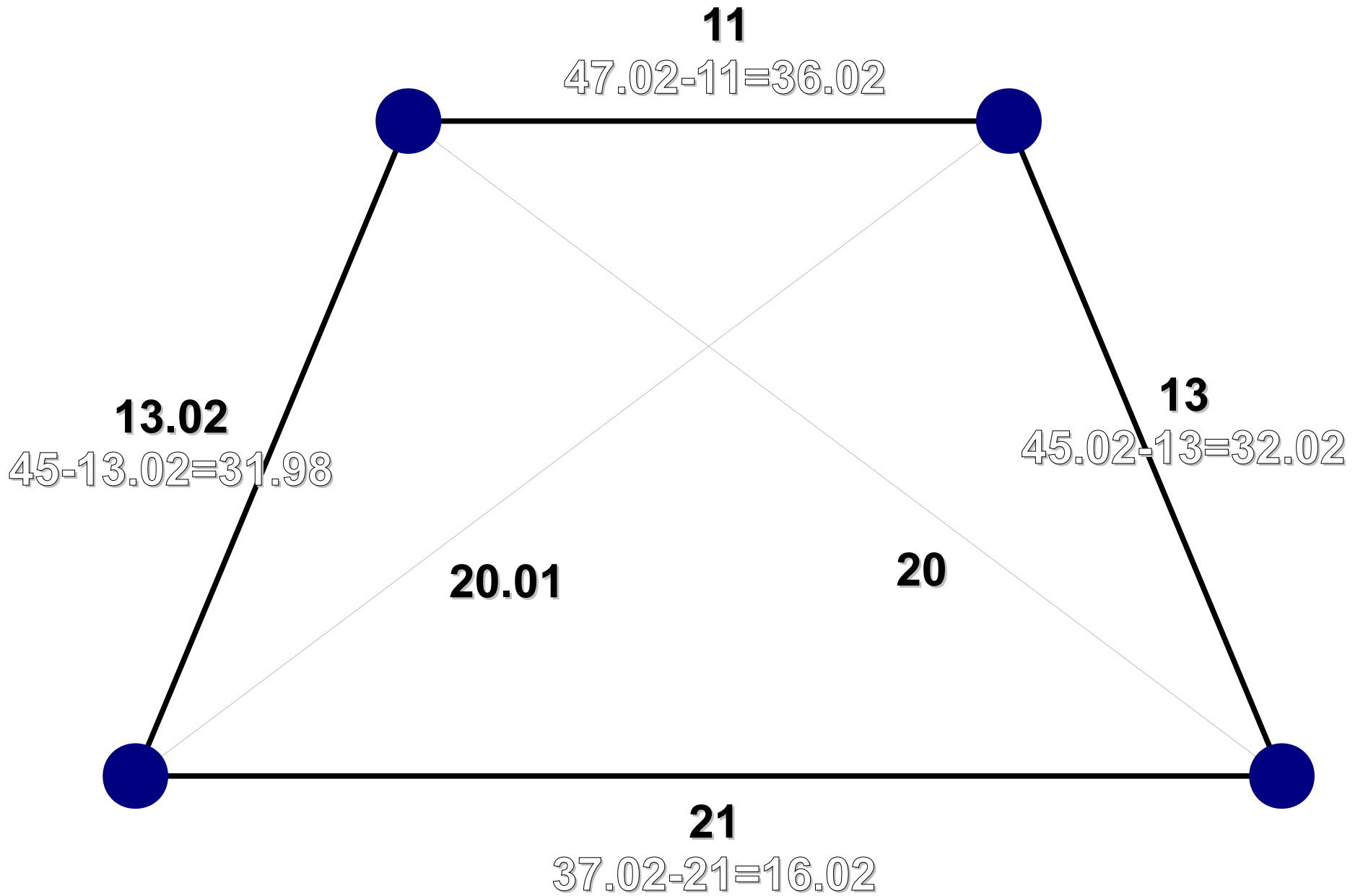
$31.01 - 13.02 = 17.99$

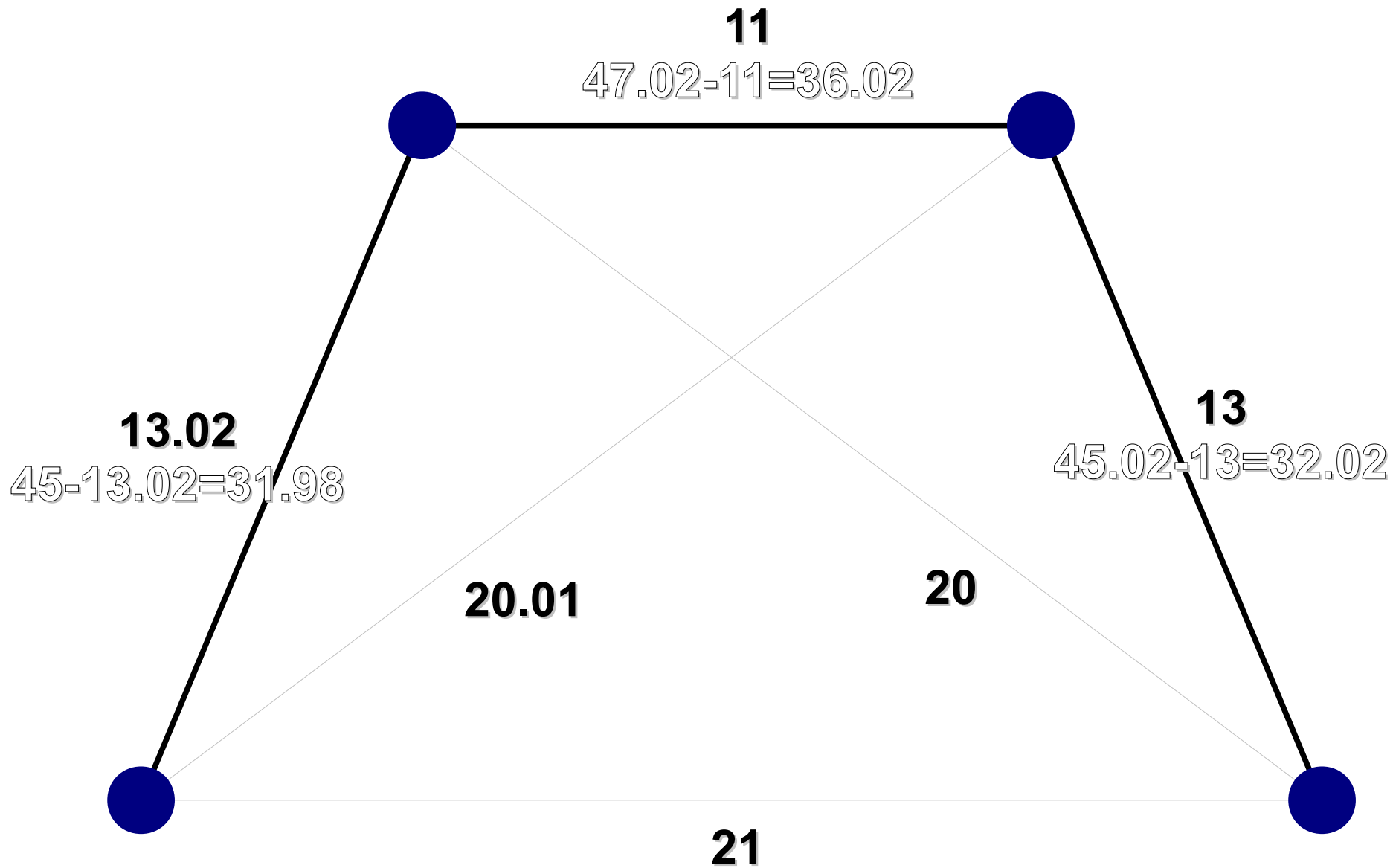
20.01

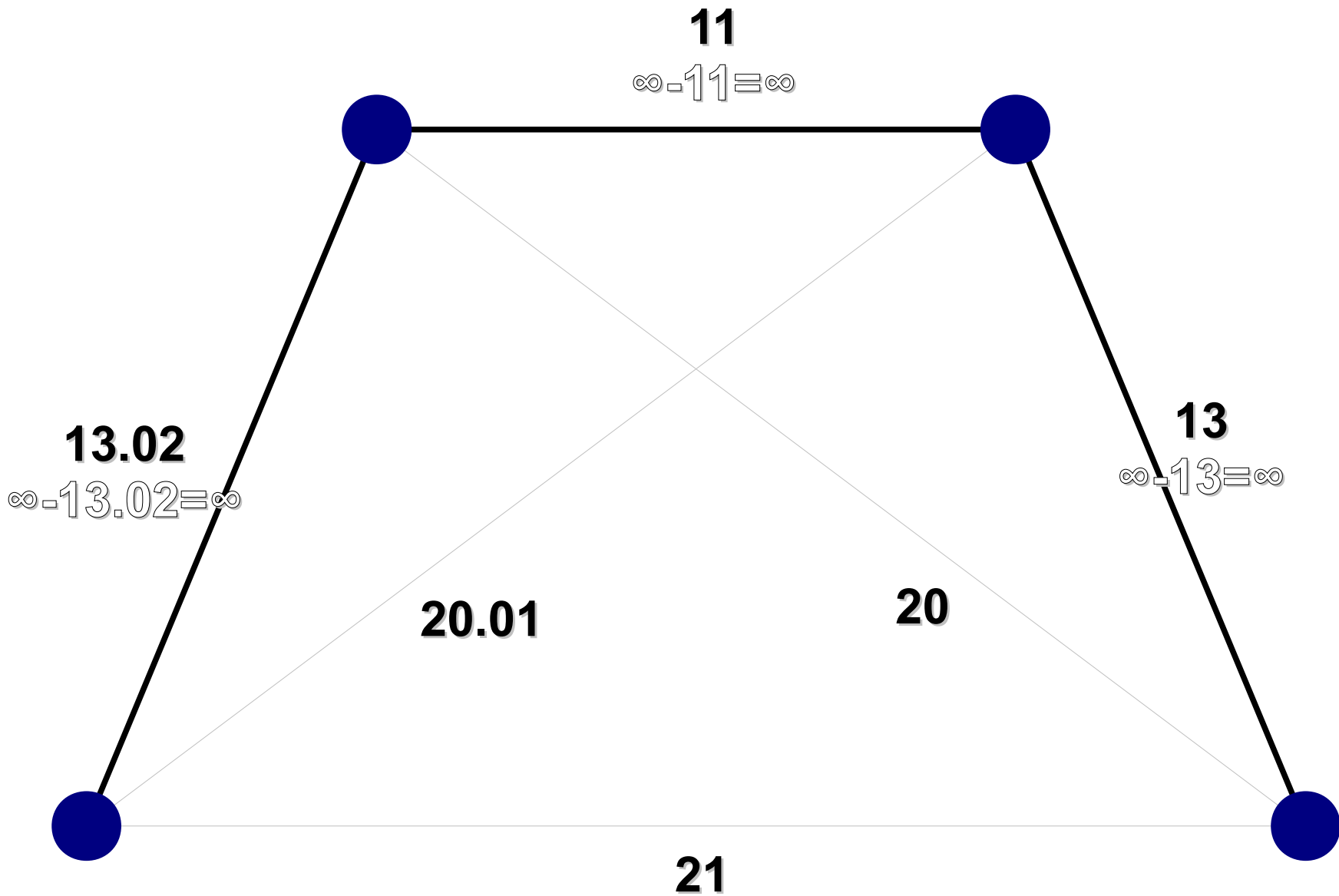
20

21

$33.01 - 21 = 12.01$







Otrzymaliśmy MST, ale czy zawsze tak będzie?

Od MST do grafu pełnego

- Rozpoczynamy od MST
- Utwórz zbiór S zawierający nadwyżki drogi dla wszystkich krawędzi nienależących do MST
- Dopóki S nie jest pusty:
 - Wybierz i usuń z S oraz dodaj grafu krawędź o **maksymalnej** nadwyżce drogi.
 - Aktualizuj nadwyżki drogi w S

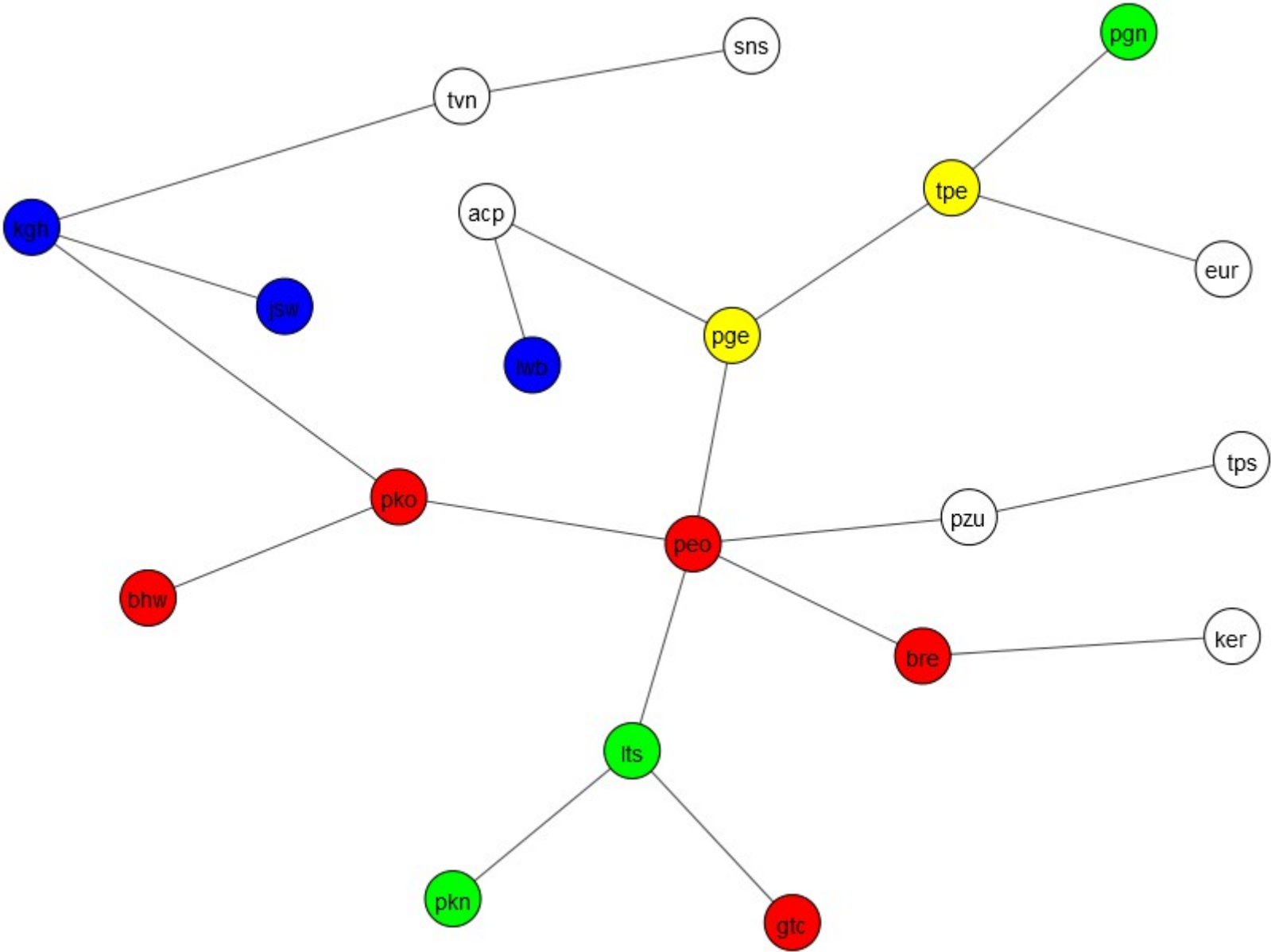
Od MST do grafu pełnego

- Rozpoczynamy od MST
- Utwórz zbiór S zawierający nadwyżki drogi dla wszystkich krawędzi nienależących do MST
- Dopóki S nie jest pusty:
 - Wybierz i usuń z S oraz dodaj grafu krawędź o **maksymalnej** nadwyżce drogi.
 - Aktualizuj nadwyżki drogi w S

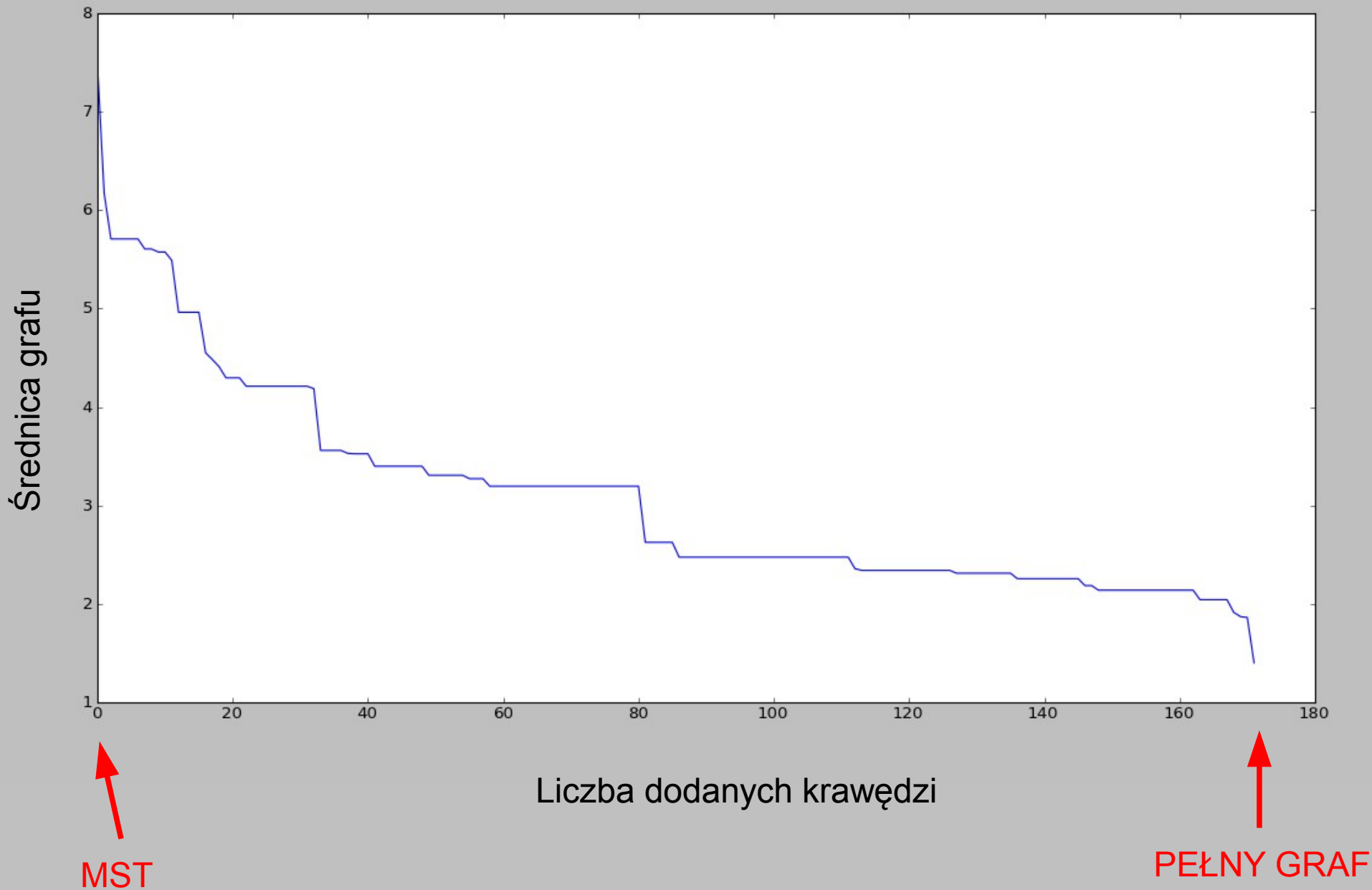
Grafy pośrednie nie są takie same jak w poprzednim algorytmie. Można zdefiniować problem dużo ogólniej używając tzw. „Edge deletion problem” np.:

- Ile maksymalnie krawędzi można usunąć aby nadwyżka drogi była mniejsza od ustalonej?
- Jaką minimalną nadwyżkę drogi można uzyskać usuwając założoną liczbę krawędzi?

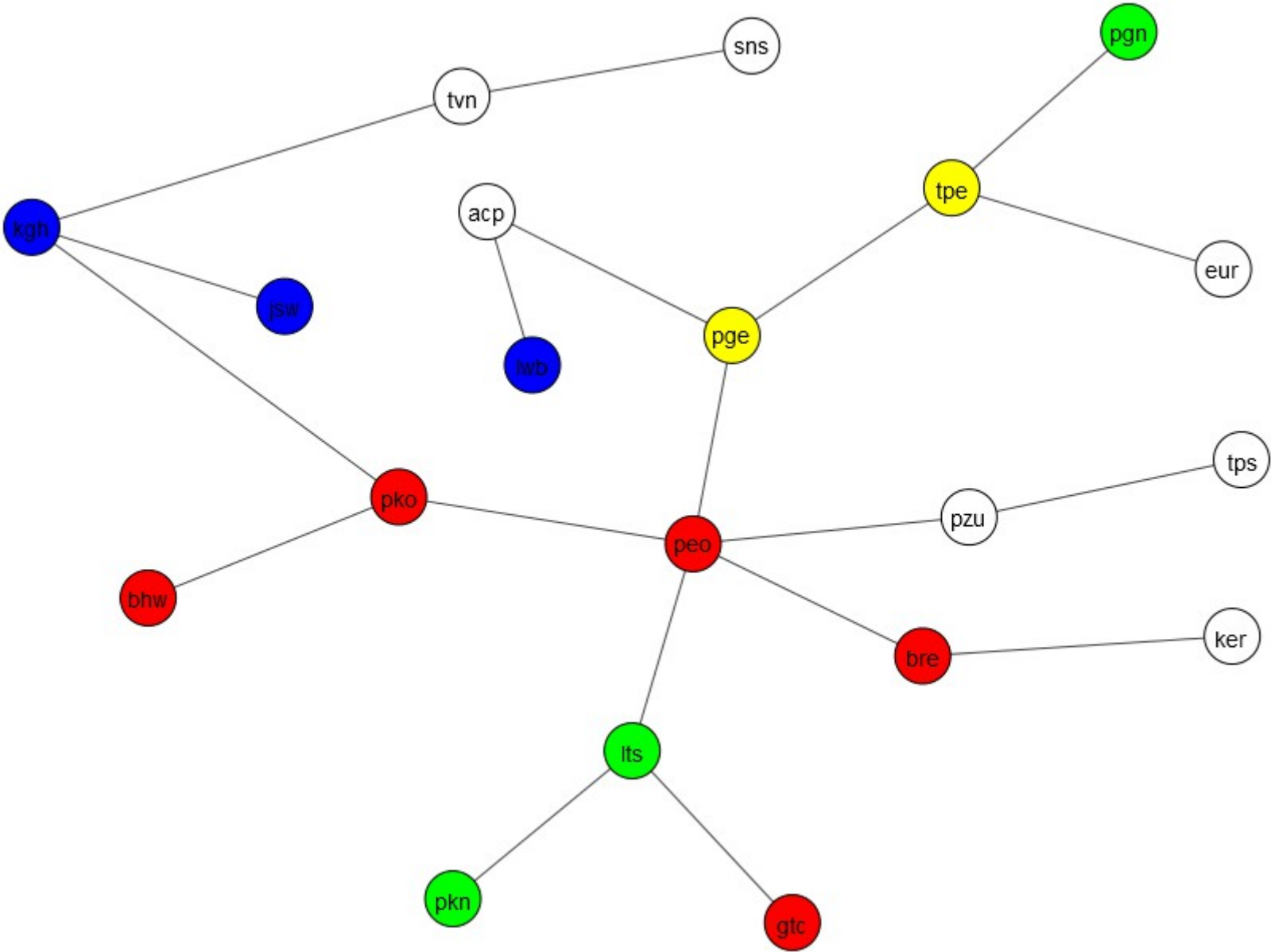
MST dla WIG20 w roku 2012

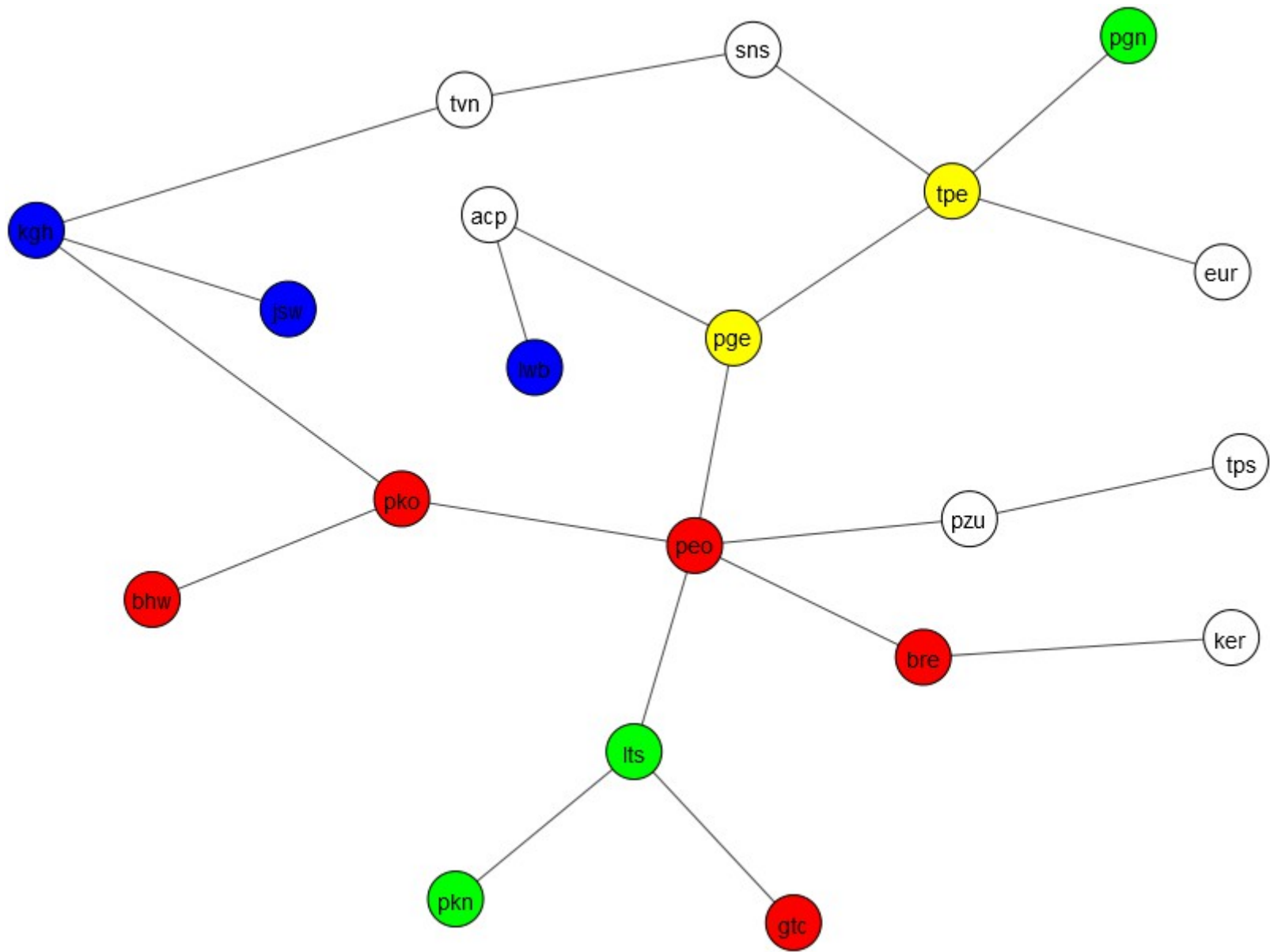


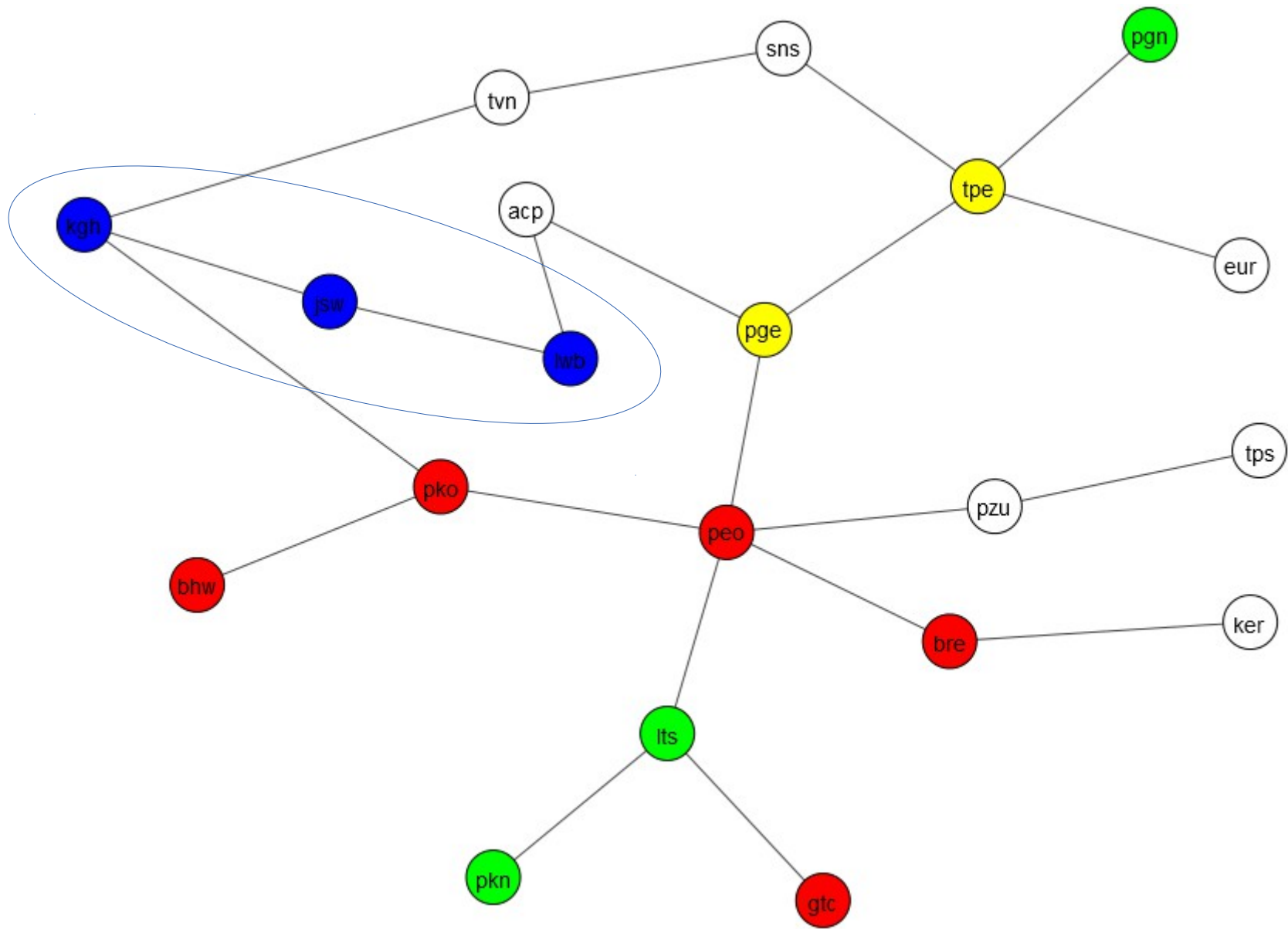
MST dla WIG20 w roku 2012

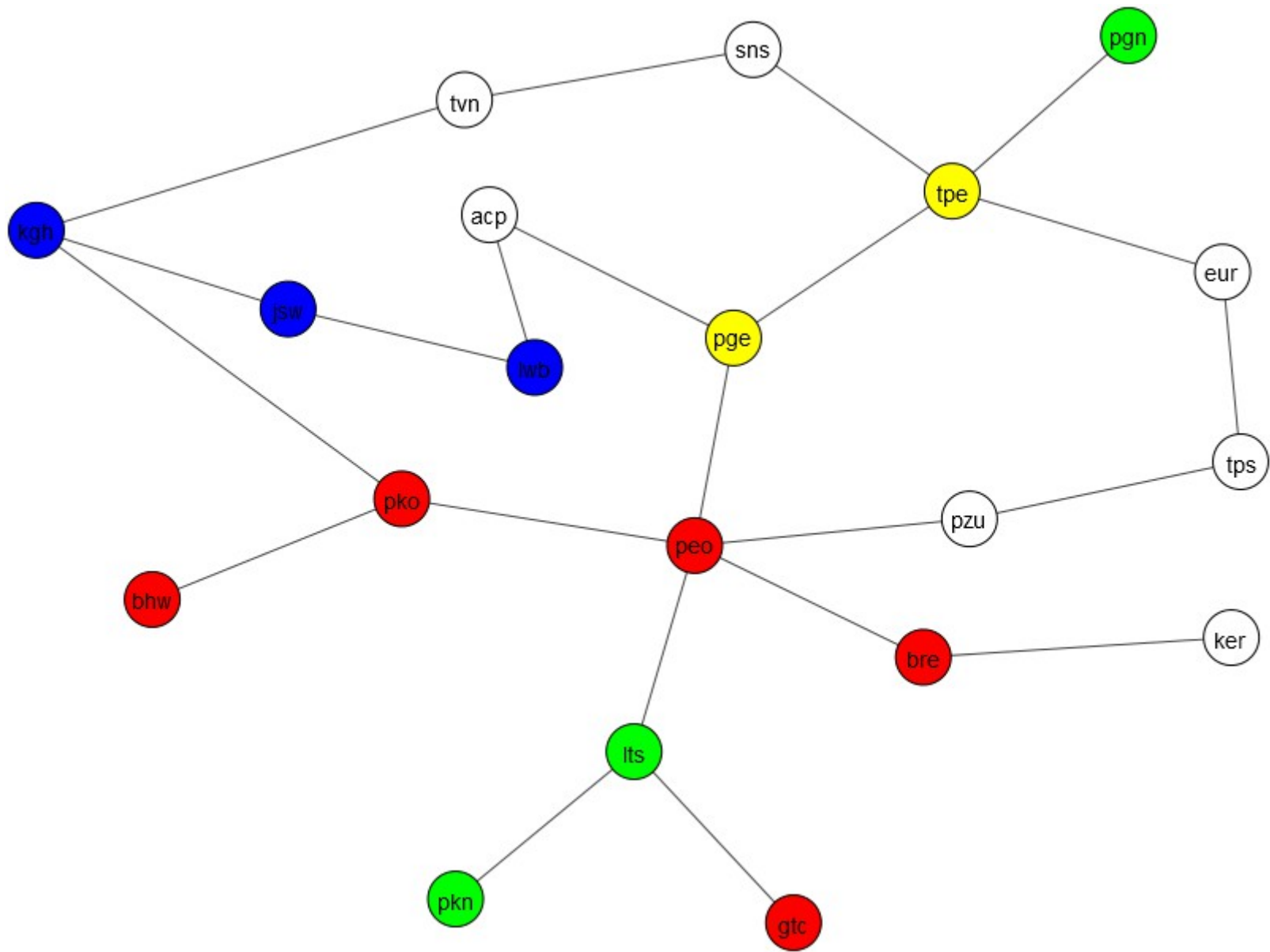


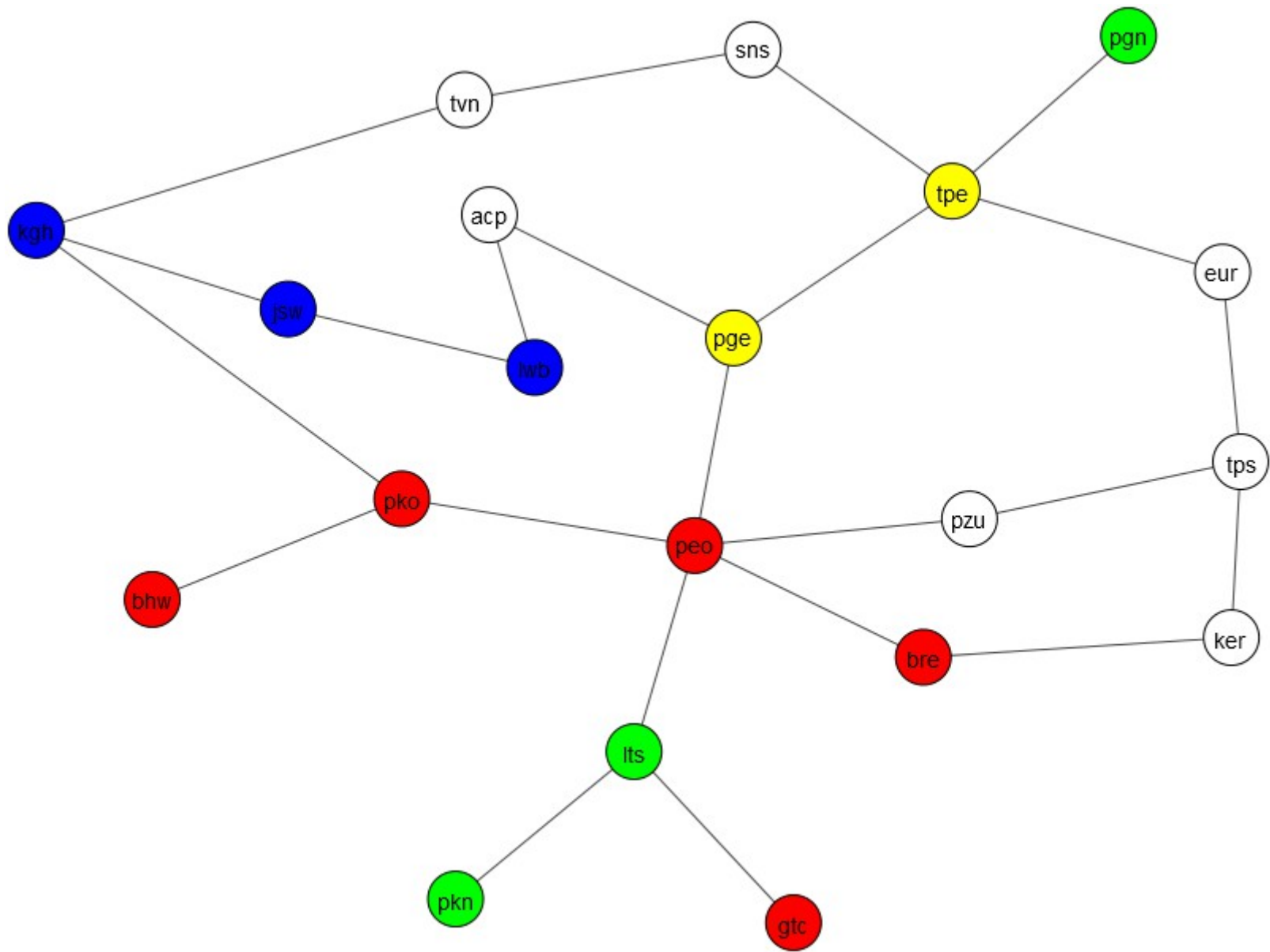
MST dla WIG20 w roku 2012











Dziękuję za uwagę