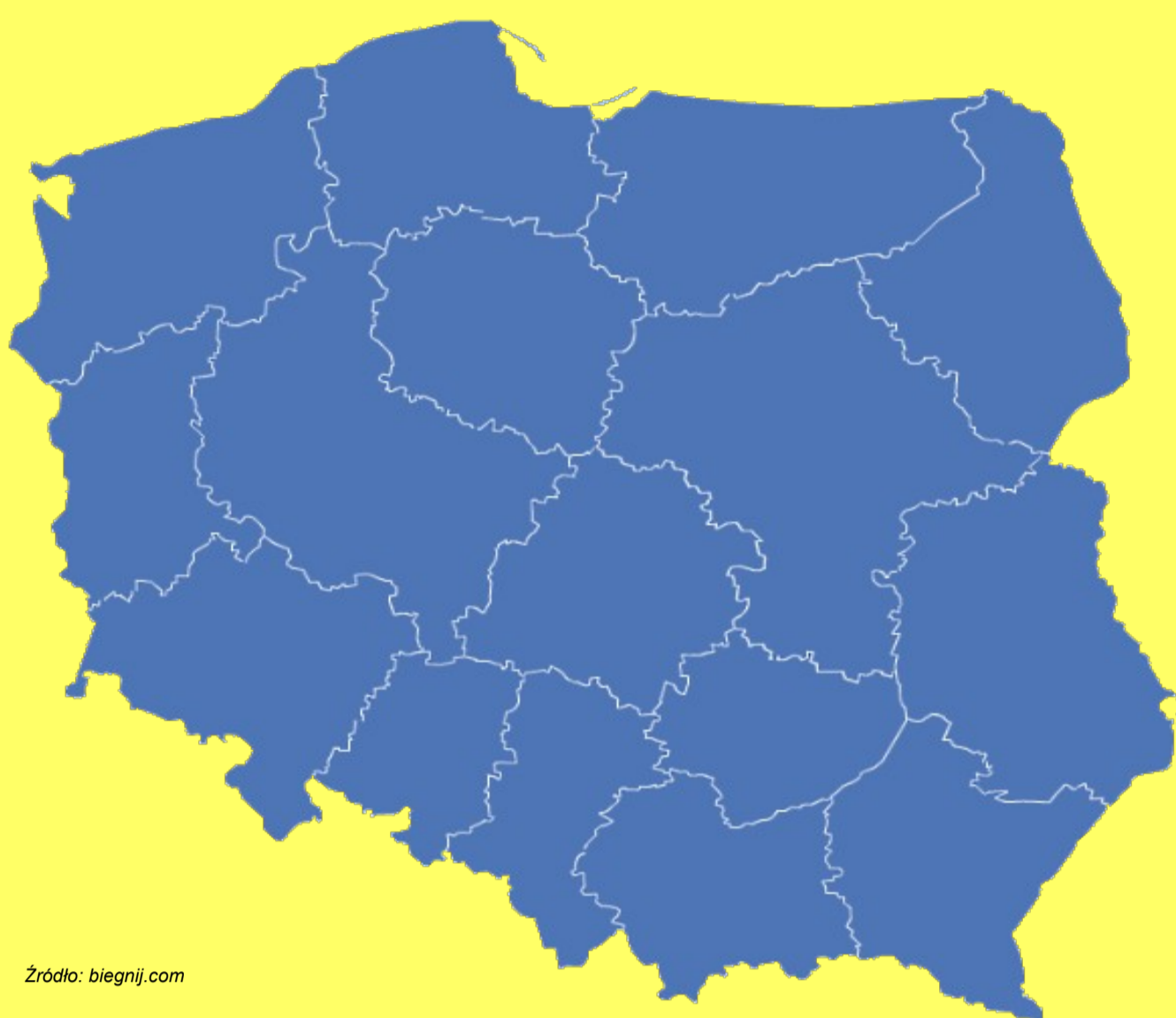


Zastosowanie nieliniowego równania Langevina, równania Fokkera-Plancka oraz modeli błędzeń losowych do opisu gospodarstw domowych Polski i Unii Europejskiej

Maciej Jagielski

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Zdjęcie: bepnj.com

Gospodarstwa domowe	Polska	Unia Europejska
o niskich dochodach	Prawo Efektów Proporcjonalnych, uogólniony model Lotka-Volterra	Prawo Boltzmanna-Gibbsa, rozszerzony model Yakovenko
o średnich dochodach	Słabe prawo Pareto, uogólniony model Lotka-Volterra	Słabe prawo Pareto, rozszerzony model Yakovenko
o wysokich dochodach	Słabe prawo Pareto	Słabe prawo Pareto, rozszerzony model Yakovenko



Zdjęcie: pl.wikipedia.org

Modele teoretyczne dotyczące Polski

- Prawo Efektów Proporcjonalnych

$$\Pi(m) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln m - \mu_t}{\sqrt{2}\sigma_t} \right) \right]$$

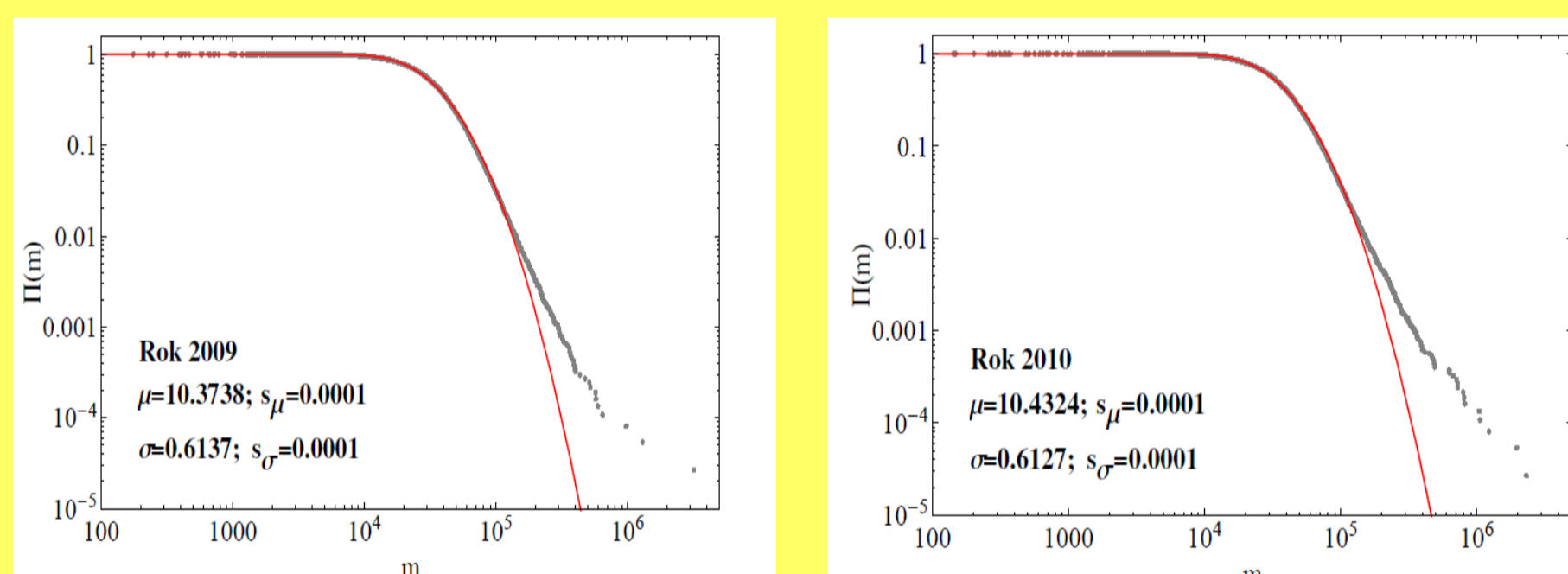
- Słabe prawo Pareto

$$A(m) = am, \quad B(m) = bm^2, \quad \Pi(m) \sim (m/m_0)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{a}{b} + 1$$

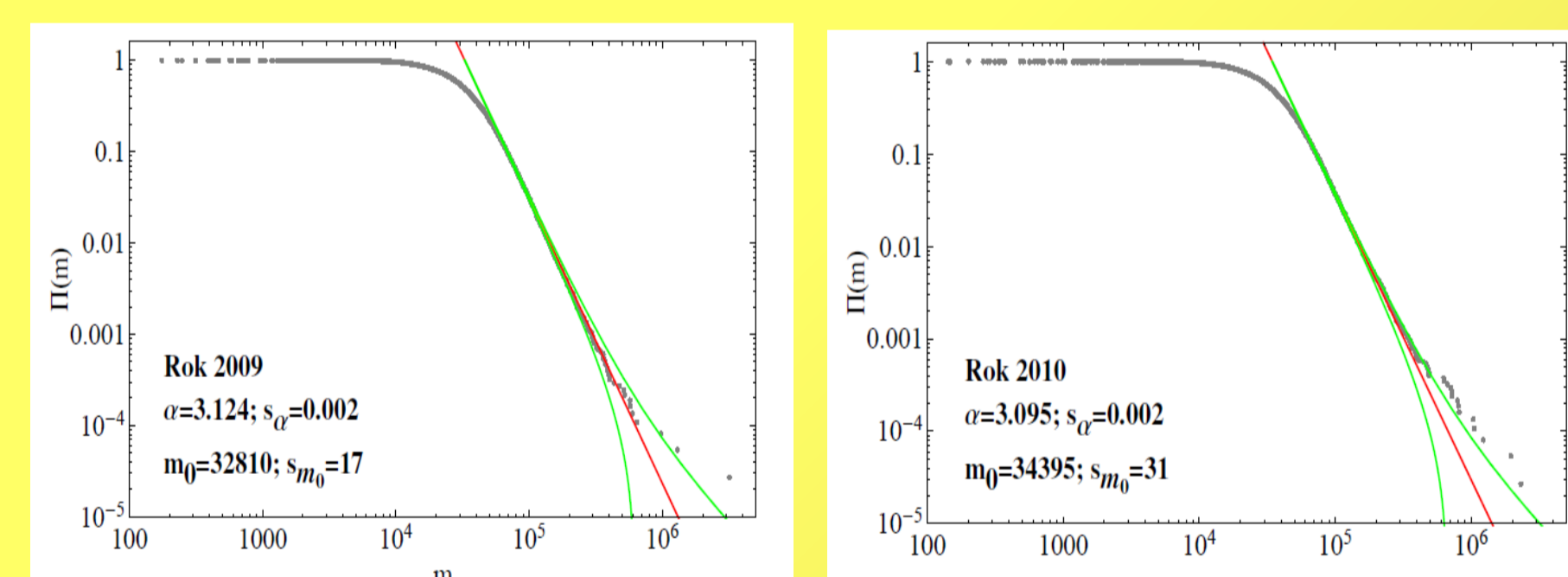
- Uogólniony model Lotka-Volterra

$$A(x_i) = \alpha x_i - a, \quad C(x_i) = x_i, \quad x_i(t) = \frac{m_i(t)}{m(t)}, \quad \Pi(x) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\alpha-1}{x})}{\Gamma(\alpha)}$$

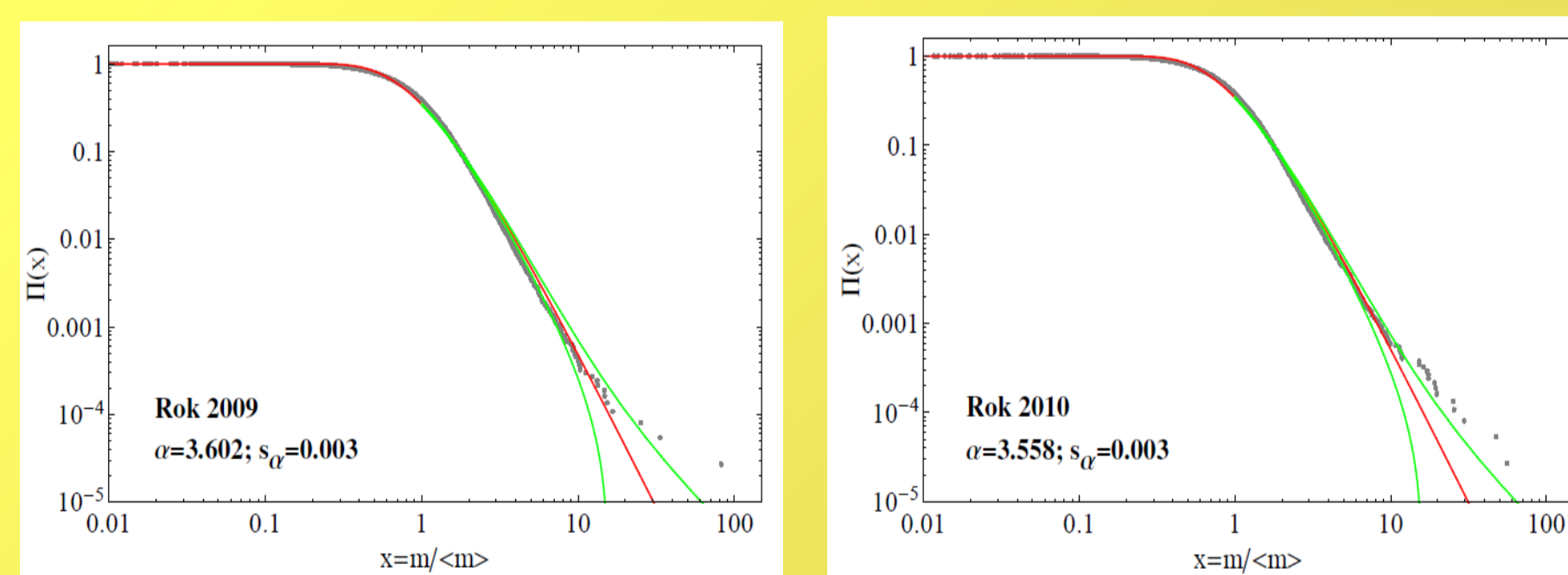
Porównania



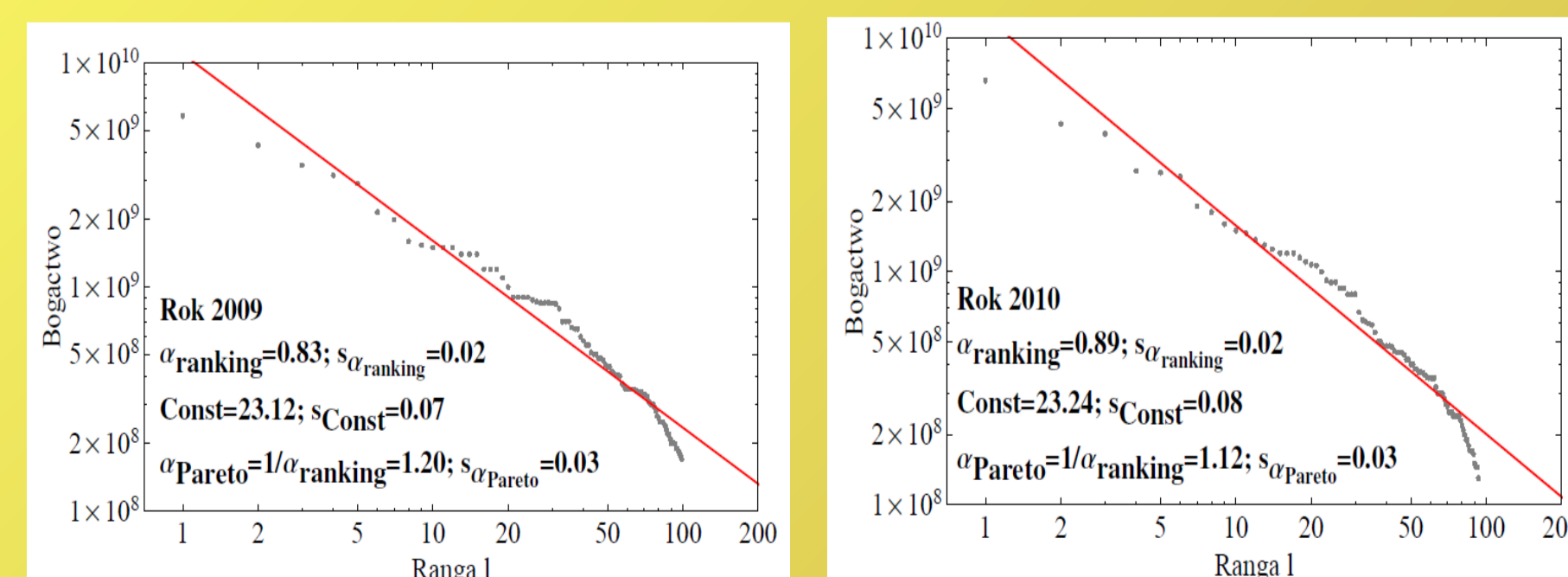
Dopasowanie dopełnienia dystrybuanty rozkładu log-normalnego (linia ciągła) do empirycznego dopełnienia dystrybuanty rocznych dochodów rozporządzalnych gospodarstw domowych w Polsce (punkty).



Dopasowanie słabego prawa Pareto (linia ciągła) do empirycznego dopełnienia dystrybuanty rocznych dochodów rozporządzalnych gospodarstw domowych w Polsce (punkty). Zielone linie oznaczają przedziały ufności dla zebranych danych empirycznych na poziomie 95%.



Dopasowanie uogólnionego modelu Lotka-Volterra (linia ciągła) do empirycznego dopełnienia dystrybuanty rocznych dochodów rozporządzalnych gospodarstw domowych w Polsce (punkty). Zielone linie oznaczają przedziały ufności dla zebranych danych empirycznych na poziomie 95%.



Ranking najbogatszych Polaków (linia ciągła oznacza dopasowanie, a punkty dane empiryczne). Jak widać, gospodarstwa domowe o wysokich dochodach są całkiem dobrze opisywane prostą o nachyleniu $-\sigma_{\text{ranking}}$.

Głównym osiągniętym celem pracy jest:

- skonstruowanie modelu teoretycznego (nazwanego przez mnie rozszerzonym modelem Yakovenko) opisującego rozkłady dochodów w całym zakresie, czyli dochody wszystkich klas społecznych, tj. gospodarstw domowych o niskich, średnich i wysokich dochodach, włączając w to także obszary przejściowe pomiędzy tymi klasami. Należy podkreślić, że pomimo wspomnianych wcześniej wielu prób teoretycznego opisu empirycznych rozkładów dochodów jednostek bądź gospodarstw domowych jest to, jak dotąd, pierwszy model dający efektywny, spójny i kompleksowy opis dochodów gospodarstw domowych wszystkich klas społecznych. Jest on ukoronowaniem obecnego stanu wiedzy dotyczącej analizy dochodów gospodarstw domowych.

Wśród osiągniętych szczegółowych celów należy wymienić:

- wyprowadzenie równania Fokkera-Plancka z równania Langevina dostosowane do konkretnych warunków brzegowych postawionego w niniejszej pracy problemu;
- zapropozowanie procedury łączenia baz danych, dzięki której możliwe było uzyskanie wystarczającej liczby danych o dochodach należących do wszystkich klas społecznych Unii Europejskiej, tj. gospodarstw domowych uzyskujących niskie, średnie i wysokie dochody;
- analizę danych empirycznych dotyczących rocznych dochodów rozporządzalnych gospodarstw domowych w Polsce polegającą na weryfikacji przytoczonych w pracy modeli: Prawa Efektów Proporcjonalnych, słabego prawa Pareto oraz uogólnionego modelu Lotka-Volterra;
- analizę danych empirycznych dotyczących rocznych dochodów brutto gospodarstw domowych w Unii Europejskiej polegającą na weryfikacji przytoczonych w pracy modeli: prawa Boltzmanna-Gibbsa, słabego prawa Pareto a przede wszystkim weryfikacji skonstruowanego przez mnie rozszerzonego modelu Yakovenko.

Istota nowoczesnego podejścia teoretycznego

Rozważmy zależny od czasu dochód $m(t)$ gospodarstwa domowego, który w czasie dt może ulec zmianie. Dochód ten można traktować jako zmienną losową. Zatem, ewolucję czasową tej zmiennej możemy opisać przy pomocy nieliniowego równania Langevina:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -A(m(t)) + C(m(t))\eta(t)$$

Z punktu widzenia ekonomii, człon $-A(m(t))$ wyraża deterministyczną część dochodów uzyskiwanych przez gospodarstwo domowe (np. pensje, renty, emerytury), a człon $C(m(t))\eta(t)$ wyraża niedeterministyczną, nieprzewidywalną część dochodów pochodzących z pracy dorywczej, bądź stanowiących np. zyski z inwestycji giełdowych.

Przechodząc od równania Langevina do równania Fokkera-Plancka i poszukując rozwiązań równowagowych dostajemy ogólną postać rozkładu równowagowego będącego podstawą zastosowanych modeli:

$$P(m) = \frac{\text{const}}{B(m)} \exp \left[- \int_{m_p}^m \frac{A(m')}{B(m')} dm' \right]$$

gdzie m_p jest minimalną wartością dochodu uzyskiwaną przez gospodarstwo domowe a $B(m)=C^2(m)/2$.

Modele teoretyczne dotyczące Unii Europejskiej

- Prawo Boltzmanna-Gibbsa

$$A(m) = A_0, \quad B(m) = B_0, \quad \Pi(m) = \exp \left(-\frac{m}{T} \right), \quad T = \frac{B_0}{A_0}$$

- Słabe prawo Pareto

$$A(m) = am, \quad B(m) = bm^2, \quad \Pi(m) \sim (m/m_0)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{a}{b} + 1$$

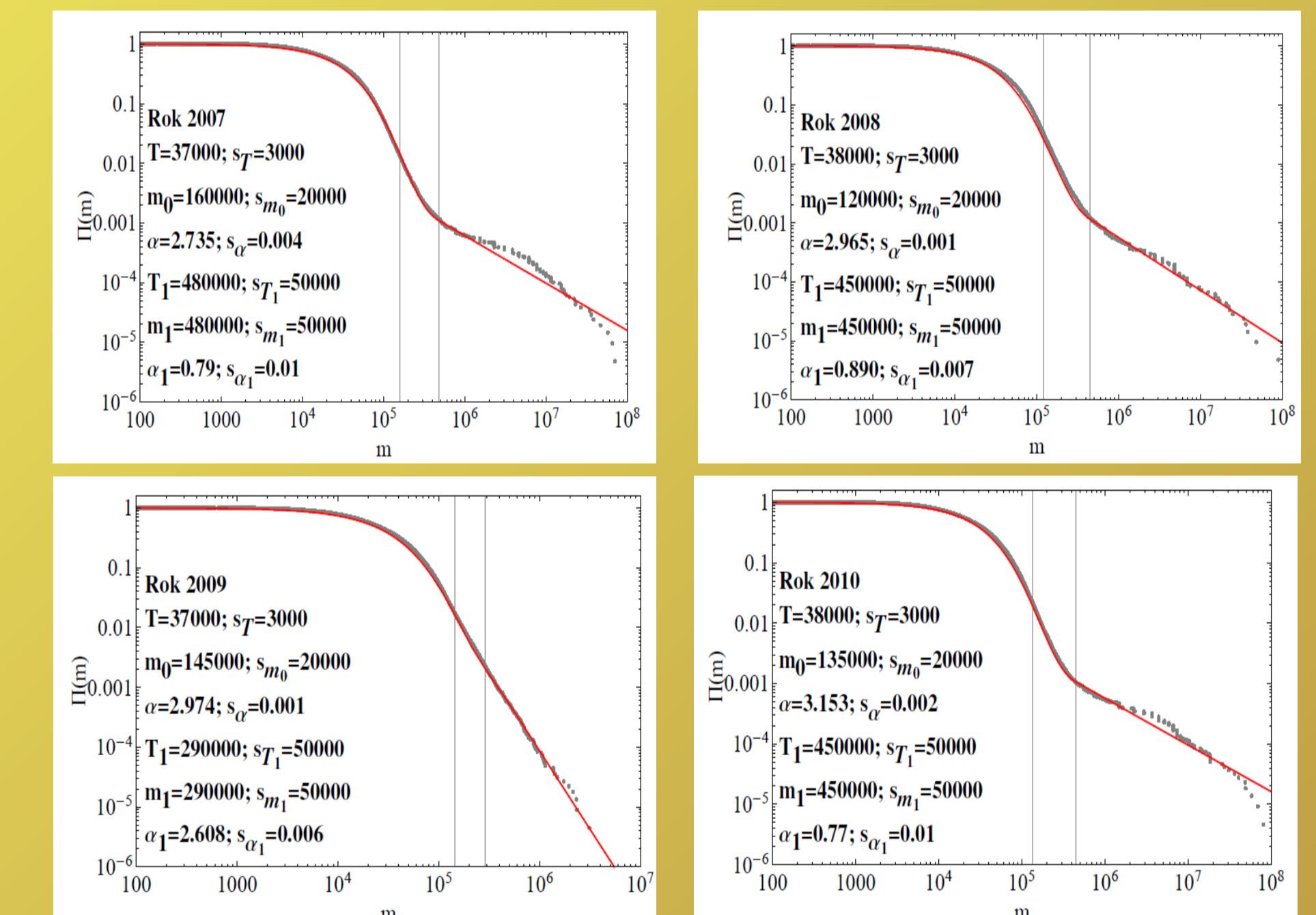
- Zaproponowany przez mnie rozszerzony model Yakovenko

$$A(m) = \begin{cases} A^<(m) = A_0 + a m, & \text{jeśli } m < m_0, \\ A^>(m) = A_0' + a' m, & \text{jeśli } m \geq m_0, \end{cases} \quad B(m) = \begin{cases} B^<(m) = B_0 + b m^2 = b(m_0^2 + m^2) & \text{jeśli } m < m_0, \\ B^>(m) = B_0' + b' m^2 = b'(m_0^2 + m^2) & \text{jeśli } m \geq m_0, \end{cases}$$

$$P(m) = \begin{cases} C^< \exp \left(-\frac{m_0}{T} \arctan \frac{m}{m_0} \right) \left[1 + \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha-1}{2}}, & \text{dla } m < m_0, \\ C^> \exp \left(-\frac{m_0}{T} \arctan \frac{m}{m_0} \right) \left[1 + \left(\frac{m}{m_0} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha-1}{2}}, & \text{dla } m \geq m_0. \end{cases}$$

$$m_0^2 = B_0/b \text{ oraz } m_0'^2 = B_0'/b', \quad T = \frac{B_0}{A_0}, \quad \frac{\alpha+1}{2} = \frac{a}{2b} + 1, \quad T_1 = \frac{B_0}{A_0}, \quad \frac{\alpha+1}{2} = \frac{a'}{2b'}$$

Moje wyniki



Porównanie przewidywań rozszerzonego modelu Yakovenko (linia ciągła) z empirycznym dopełnieniem dystrybuanty rocznych dochodów brutto gospodarstw domowych w Unii Europejskiej (punkty). Cienkie linie pionowe zaznaczają odpowiednio wartości m_0 oraz m_0' .

Wyznaczone parametry pochodzące z różnych modeli, a w szczególności z rozszerzonego modelu Yakovenko, mogą stanowić wskaźniki kryzysu. Kryzys nie wpływa na gospodarstwa domowe o niskich dochodach (parametry prawa Boltzmanna-Gibbsa praktycznie nie zmieniają się), natomiast prowadzi do mniejszego rozwarstwienia społecznego wśród gospodarstw domowych o średnich i wysokich dochodach (oba wykładniki Pareto wyraźnie rosną). Warto jednak zauważyć, że w roku 2009 w przypadku gospodarstw domowych o wysokich dochodach wykładnik Pareto doznaje wręcz skokowego wzrostu co oznacza, że skutki finansowe kryzysu dla najbogatszych obywateli społeczeństwa Unii Europejskiej były nadzwyczaj dotkliwe. Jednak w celu wysnucia dalszych wniosków (zwłaszcza dotyczących uniwersalnego charakteru uzyskanych wyników) niezbędne są dodatkowe badania, polegające przede wszystkim na przeprowadzeniu porównań z wcześniejszymi kryzysami.

Z kolei, klasa społeczna reprezentowana przez gospodarstwa domowe o niskich dochodach wydaje się zaskakująco stabilna. Jej dochody nie ulegają znaczącym zmianom w wyniku kryzysu. Zatem parametry rozkładów opisujących niskie dochody gospodarstw domowych nie mogą być indykatorami kryzysu. Jak się wydaje, tylko analiza średnich i wysokich dochodów gospodarstw domowych może dać odpowiedź na pytanie czy nadchodzi kryzys.

Bibliografia

- [1] M. Jagielski, R. Kutner, Acta Phys. Pol. B (2014), w druku.
- [2] M. Jagielski, R. Kutner, Physica A 392, str. 2130-2138 (2013).
- [3] M. Jagielski, R. Kutner, Acta Phys. Pol. A 123, str. 538-541 (2013).
- [4] M. Jagielski, R. Kutner, M. Pęczkowski, Acta Phys. Pol. A 121, str. B47-B49 (2012).
- [5] M. Jagielski, R. Kutner, Ekonomia 25, str. 154-162 (2011).
- [6] M. Jagielski, R. Kutner, Acta Phys. Pol. A 117, str. 615-618 (2010).